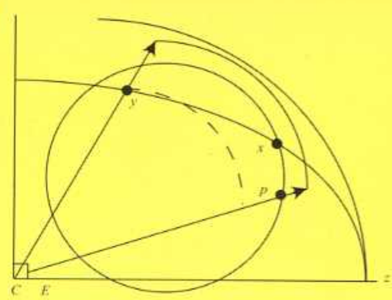
В помощь преподавателю

Алгебра

и начала анализа

Задания на готовых чертежах

10–11 классы



Издательство «Учитель»

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
10–11 классы
Задания на готовых чертежах

Автор-составитель Н. Ю. Милованов

Волгоград

УДК 372.016:512*10/11
ББК 74.262.21
А45

Автор-составитель Н. Ю. Милованов

А45 **Алгебра** и начала анализа. 10–11 классы. Задания на готовых чертежах / авт.-сост. Н. Ю. Милованов. – Волгоград : Учитель, 2015. – 106 с.
ISBN 978-5-7057-4136-6

Пособие содержит авторские задачи на готовых чертежах курса математического анализа, которые применяются на уроках не только для устной работы, но и для составления заданий по самостоятельным и контрольным работам, для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Пособие будет актуально для преподавателей математики и учащихся, которые обучаются по программе и по учебнику для общеобразовательных организаций «Алгебра и начала анализа» под ред. А. Г. Мордковича и по учебникам других авторских коллективов. Большое количество устных задач по готовым чертежам предполагает творческое применение и обеспечит учителю наглядность, эффективное использование учебного урочного времени, а также позволит планировать уроки с учетом новых технологий и современных требований, положений ФГОС.

Предназначено преподавателям математики и репетиторам для использования в организации образовательного процесса по предмету и диагностики уровня алгебраической подготовки выпускников, школьникам для самостоятельной подготовки к ЕГЭ.

УДК 372.016:512*10/11
ББК 74.262.21

Пособия издательства «Учитель» допущены к использованию в образовательном процессе Приказом Министерства образования и науки РФ № 16 от 16.01.2012 г.

ISBN 978-5-7057-4136-6

© Милованов Н. Ю., автор-составитель, 2014
© Издательство «Учитель», 2014
© Оформление. Издательство «Учитель», 2014

Издание 2015 г.

ВВЕДЕНИЕ

Устные задачи курса математического анализа на готовых чертежах составлены в соответствии с программой и учебником для общеобразовательных учреждений «Алгебра и начала анализа» 10 и 11 классов под редакцией А. Г. Мордковича, но данное пособие также можно использовать и при изучении начал анализа по учебникам других авторских коллективов.

Данная печатная работа может применяться и при изучении понятия функции в 8–9 классах (в зависимости от учебника, по которому преподает учитель), так как состоит из четырех разделов: «Функция и ее свойства», «Предел функции», «Производная функции», «Первообразная функции и интеграл».

Представленные разработки содержат графические задания для устной работы и ответы к ним. Данные задания можно использовать в качестве актуализации знаний, умений и навыков, для объяснения нового материала и открытия факта, для закрепления полученных знаний или для контроля знаний, умений и навыков после изученного материала.

В данной разработке 70 разнообразных заданий, в каждом из которых подобрано еще шесть упражнений. В них имеются задания, не имеющие решения, и контрпримеры, расположенные по мере увеличения сложности.

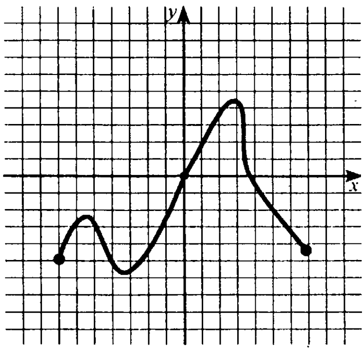
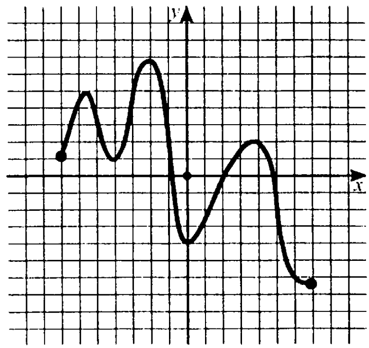
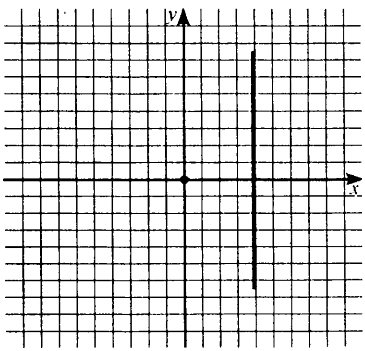
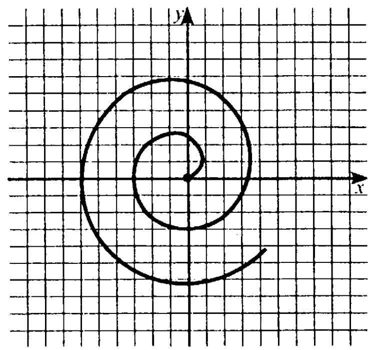
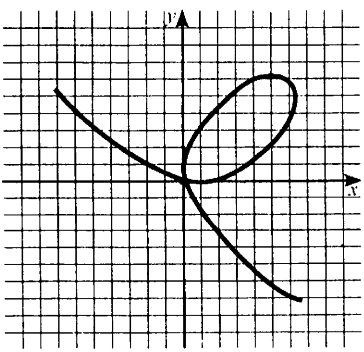
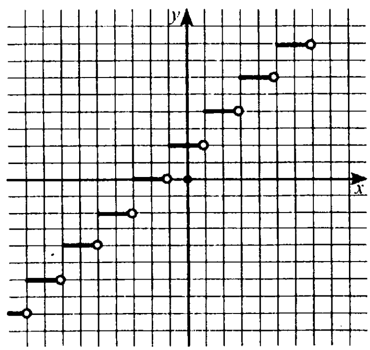
Последний раздел называется «Теоретические сведения», в нем помимо теории имеются задания, аналогичные данным, но с решением и подробным обоснованием выполнения тех или иных действий.

Целью данного пособия является практическая помощь учителю математики.

Предлагаемое распределение материала имеет примерный характер и предполагает творческое применение. Учитель может по своему усмотрению вносить коррективы в задания.

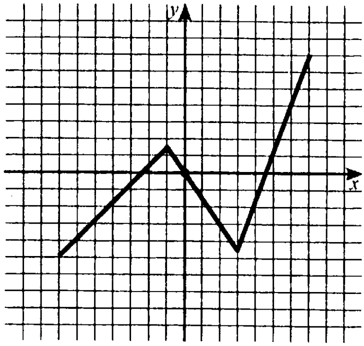
I. ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Задание № 1. Среди графиков кривых выберите те, которые являются функциями.

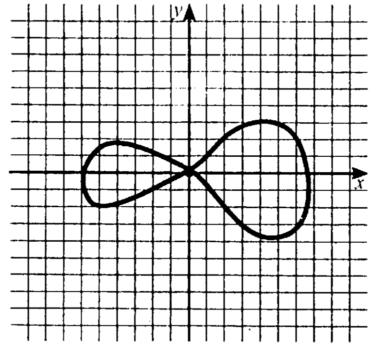
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 2. Среди графиков кривых выберите те, которые являются функциями.

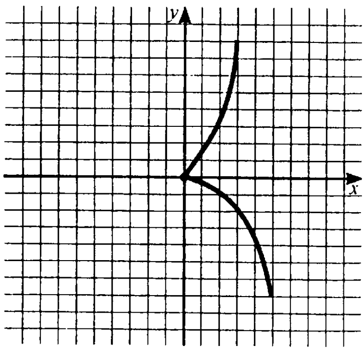
1



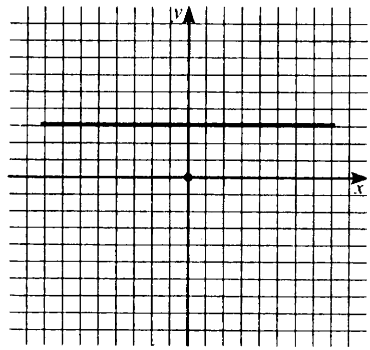
4



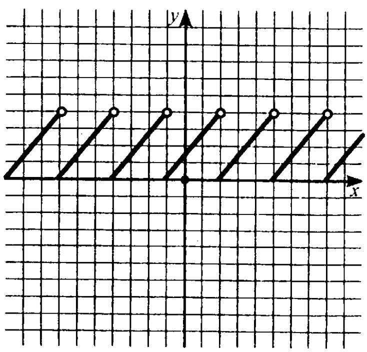
2



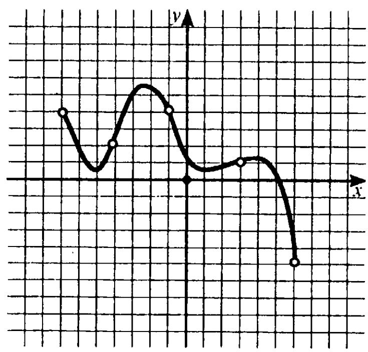
5



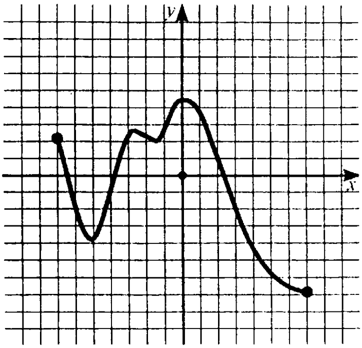
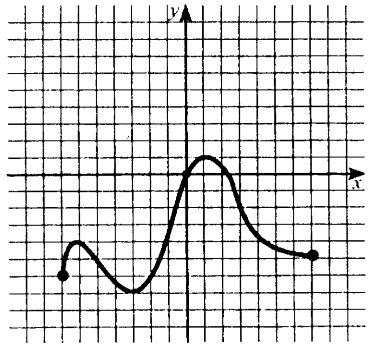
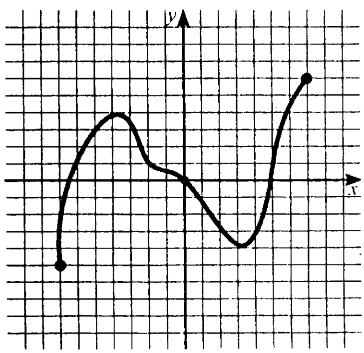
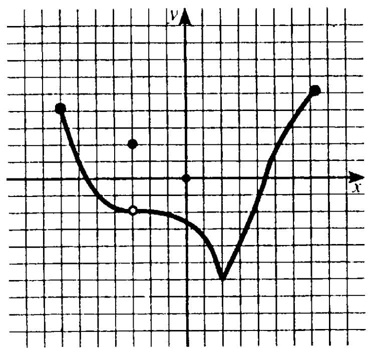
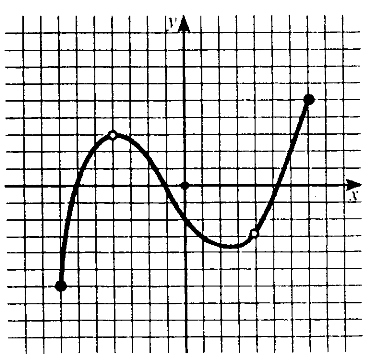
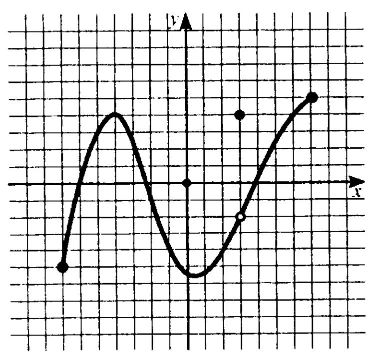
3



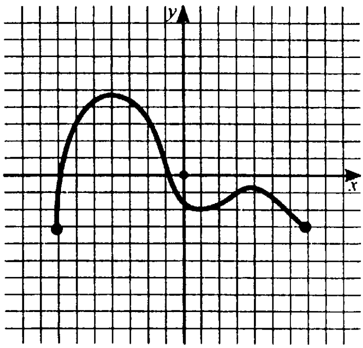
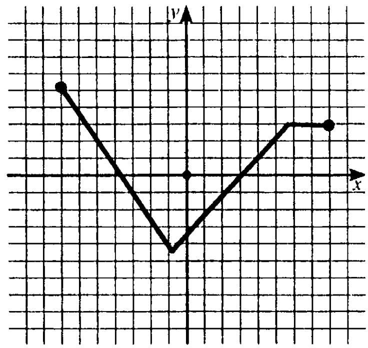
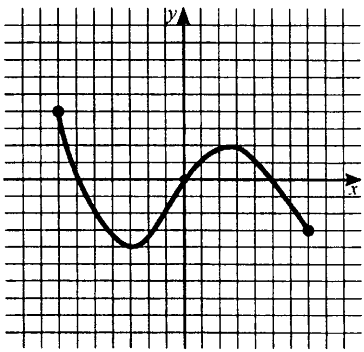
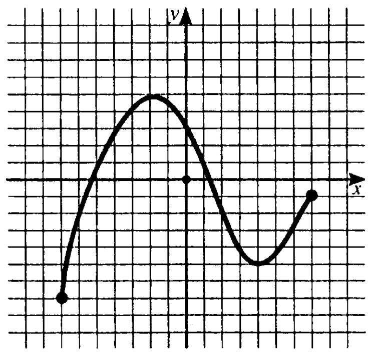
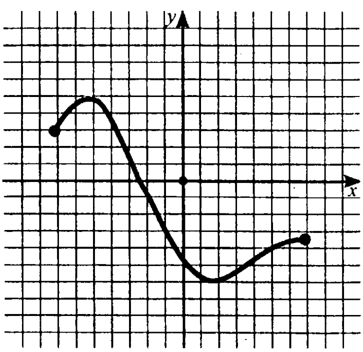
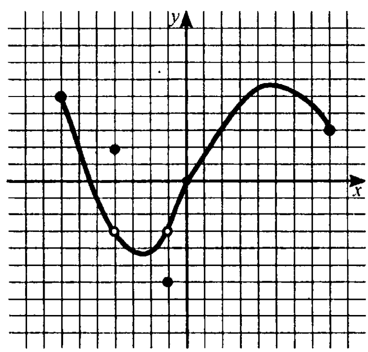
6



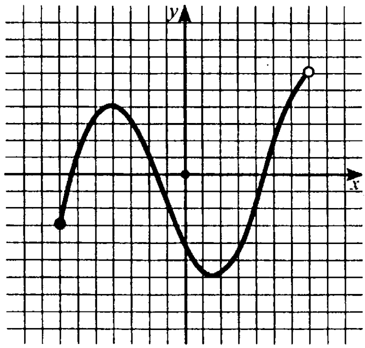
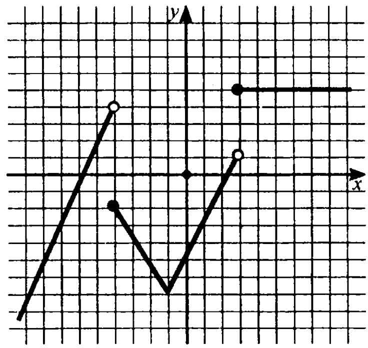
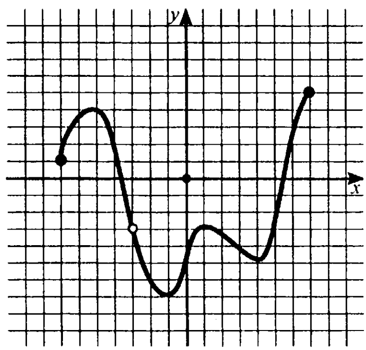
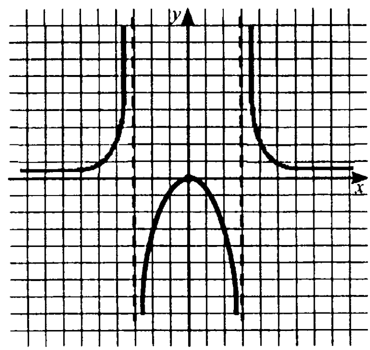
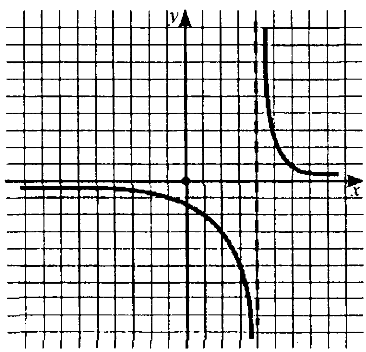
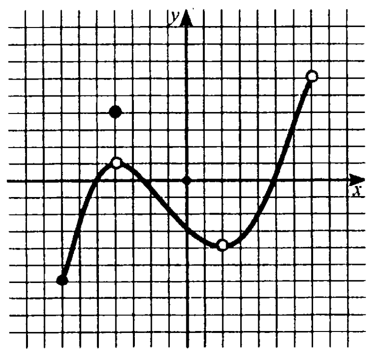
Задание № 3. По графику функции $y = f(x)$ найдите ее значение при $x = a$.

1	 $a = -5$	4	 $a = 1$
2	 $a = 0$	5	 $a = -3$
3	 $a = -4$	6	 $a = 3$

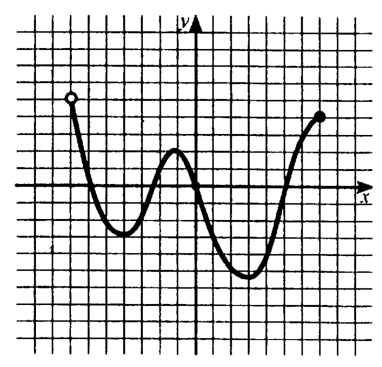
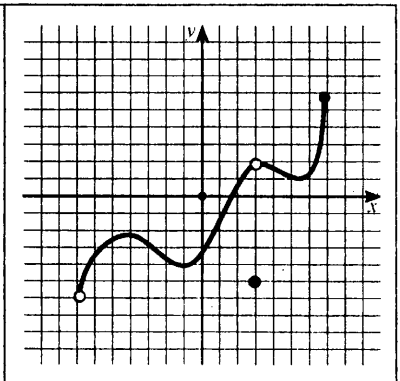
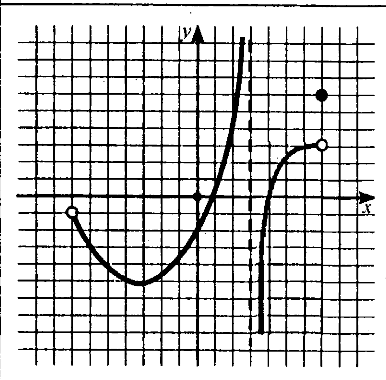
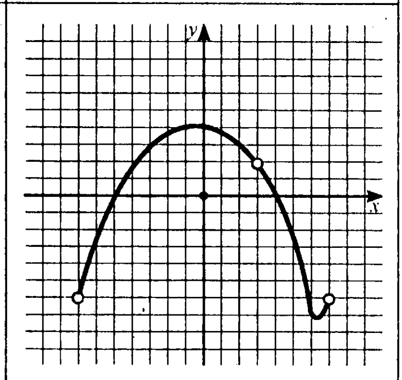
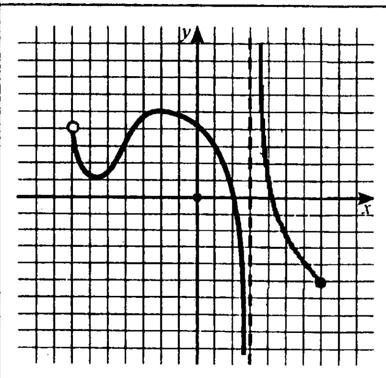
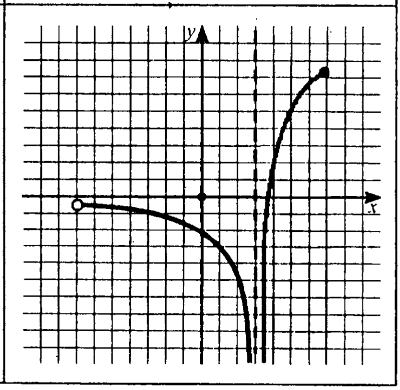
Задание № 4. По графику функции $y = f(x)$ найдите те значения аргумента, при которых $y = a$.

1	 $a = 3$	4	 $a = 2$
2	 $a = 0$	5	 $a = 5$
3	 $a = -1$	6	 $a = -3$

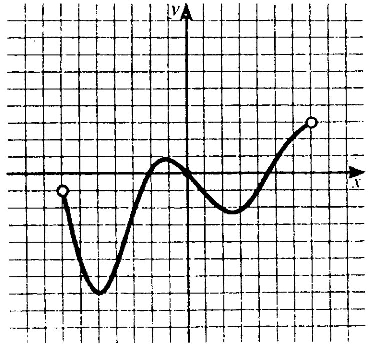
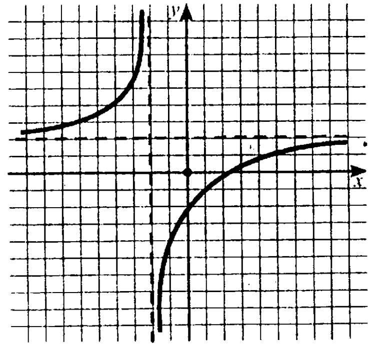
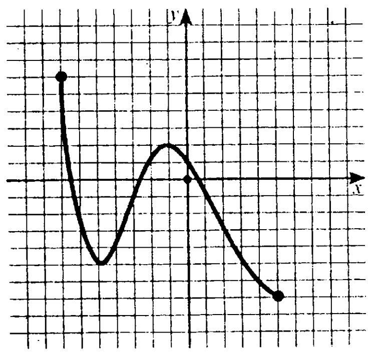
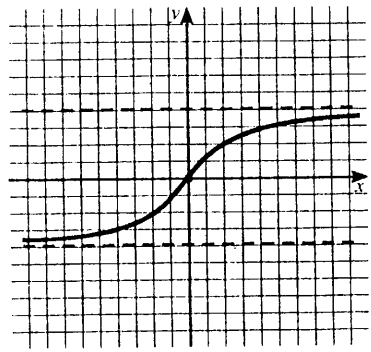
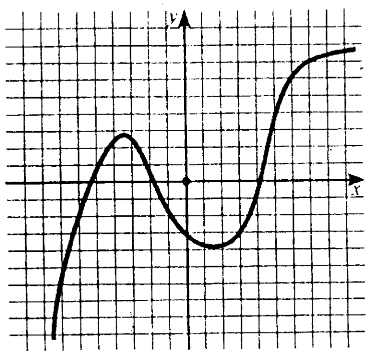
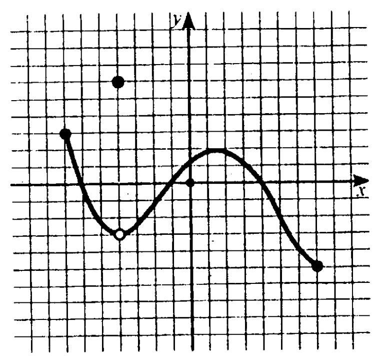
Задание № 5. По графику функции $y = f(x)$ найдите ее область определения.

1		4	
2		5	
3		6	

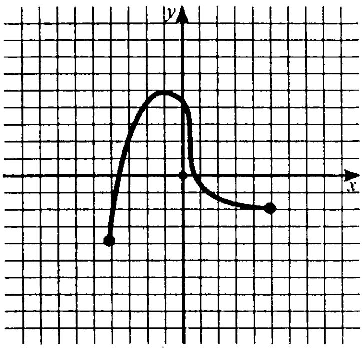
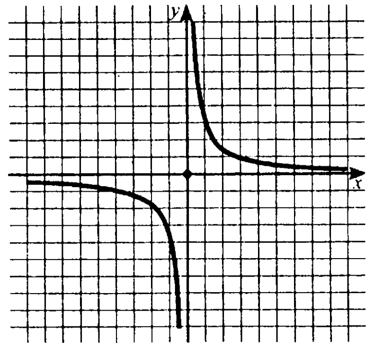
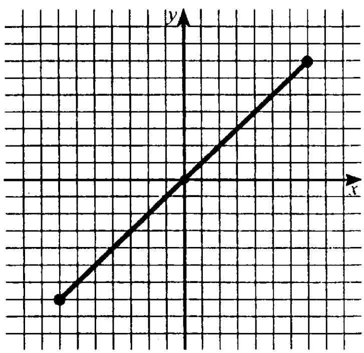
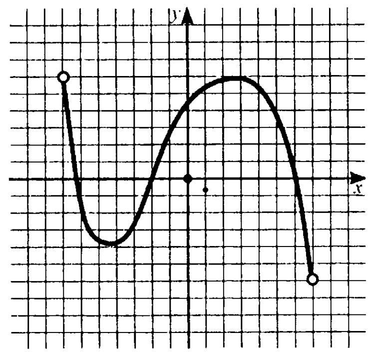
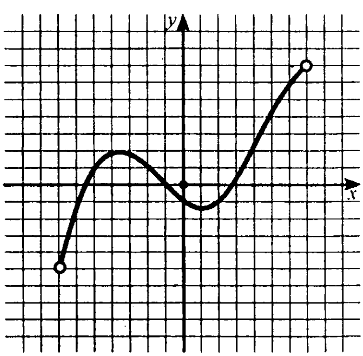
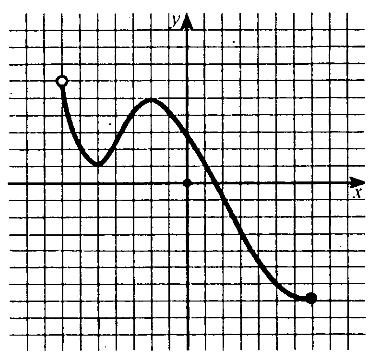
Задание № 6. Для каких функций областью определения является числовой промежуток $(-7; 3) \cup (3; 7]$?

1		4	
2		5	
3		6	

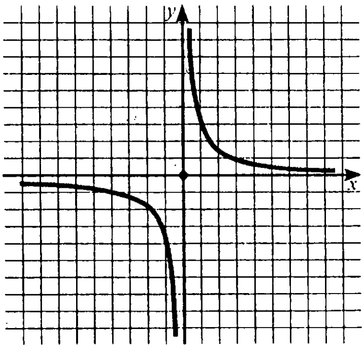
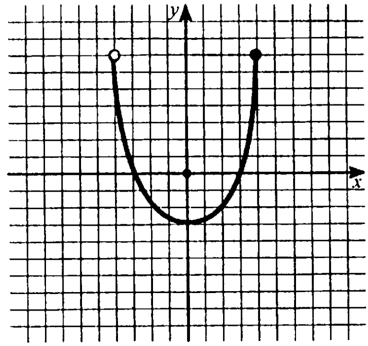
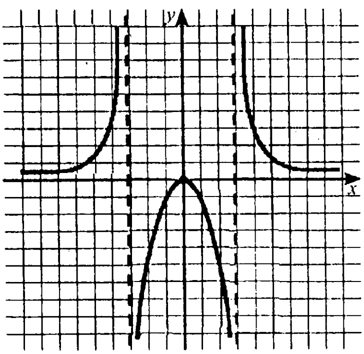
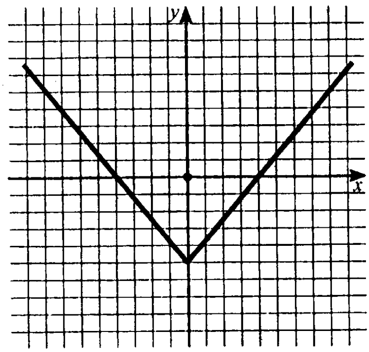
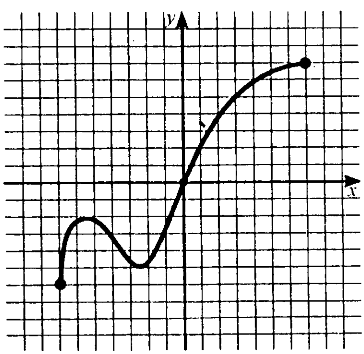
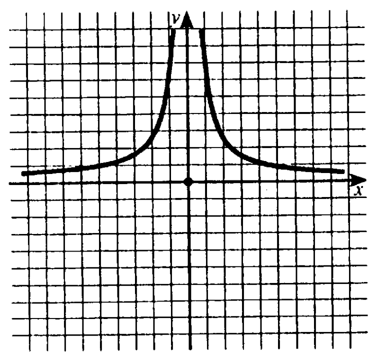
Задание № 7. По графику функции $y = f(x)$ определите ее область значений.

1		4	
2		5	
3		6	

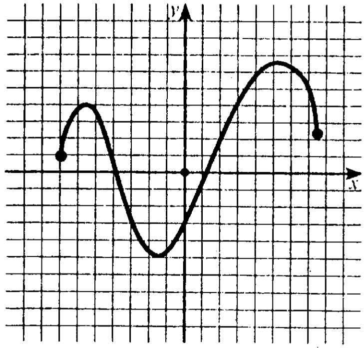
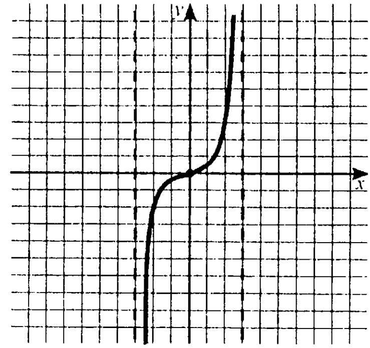
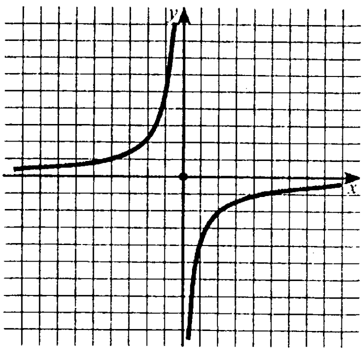
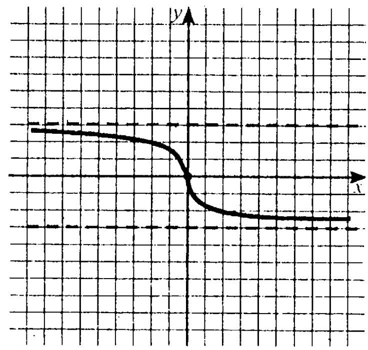
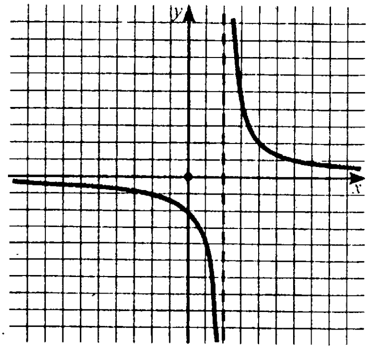
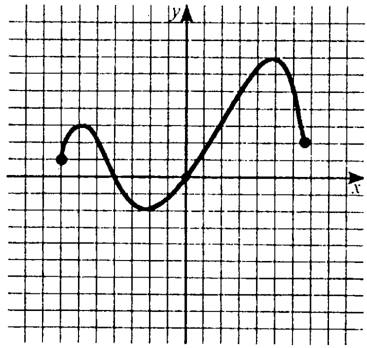
Задание № 8. Среди функций выберите ту, у которой область определения совпадает с областью значений.

1		4	
2		5	
3		6	

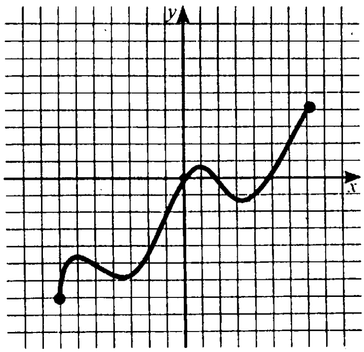
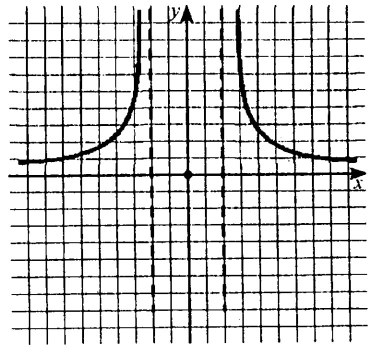
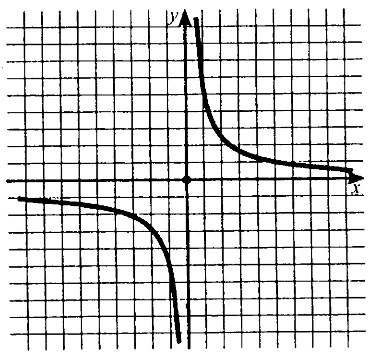
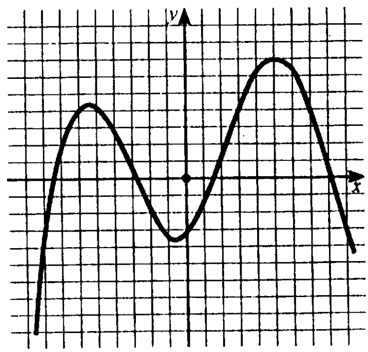
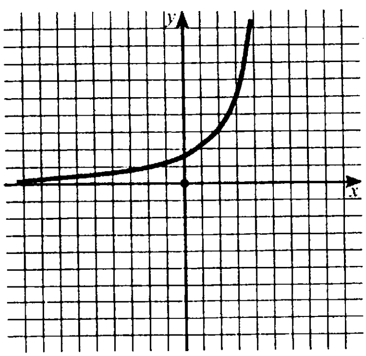
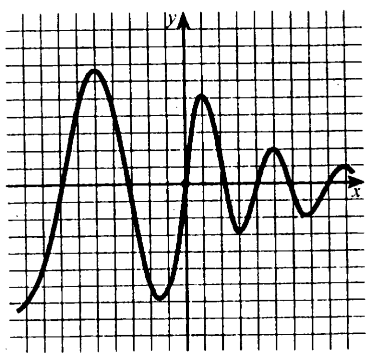
Задание № 9. Среди функций выберите ту, которая является четной.

1		4	
2		5	
3		6	

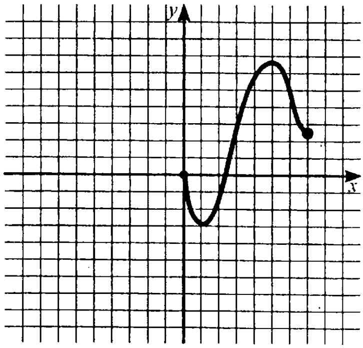
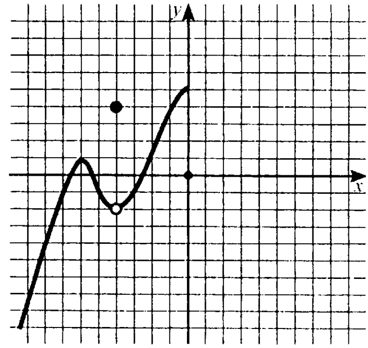
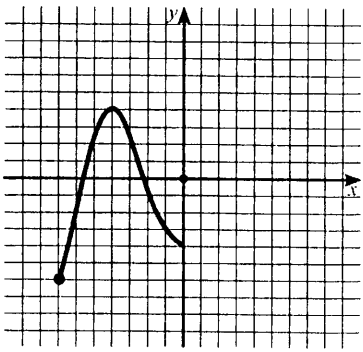
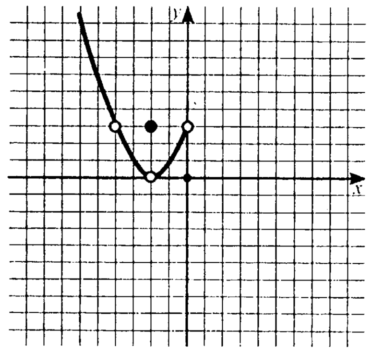
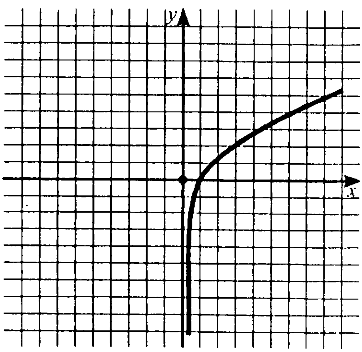
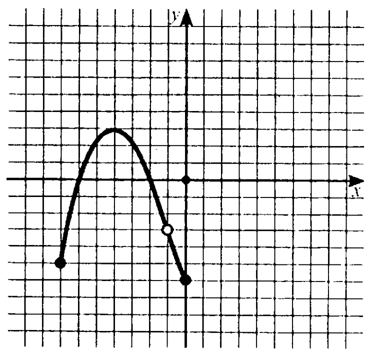
Задание № 10. Среди функций выберите ту, которая является нечетной.

1		4	
2		5	
3		6	

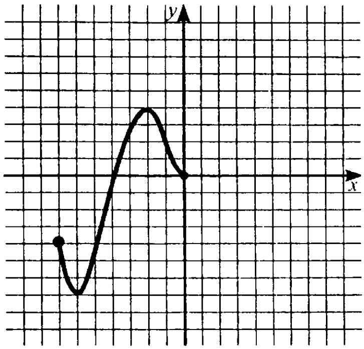
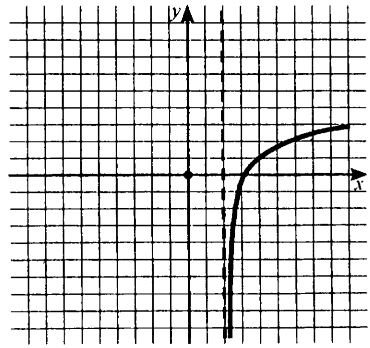
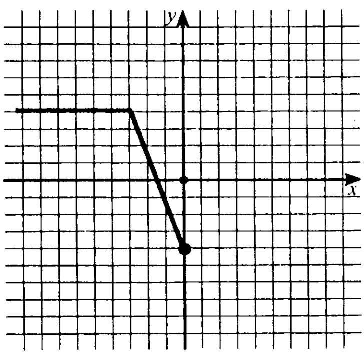
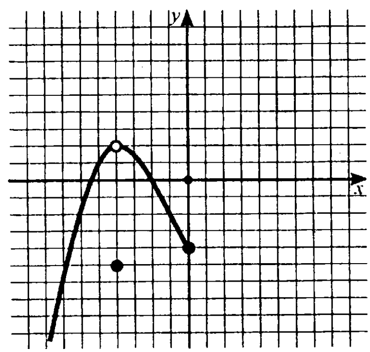
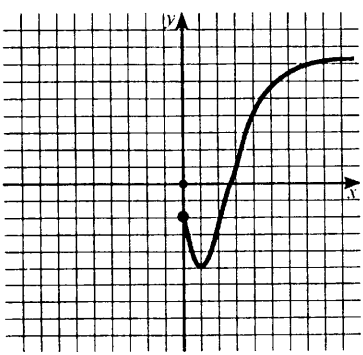
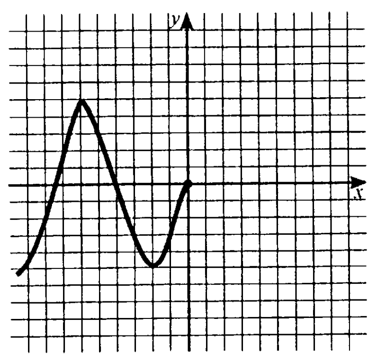
Задание № 11. Среди функций выберите ту, которая является функцией общего вида.

1		4	
2		5	
3		6	

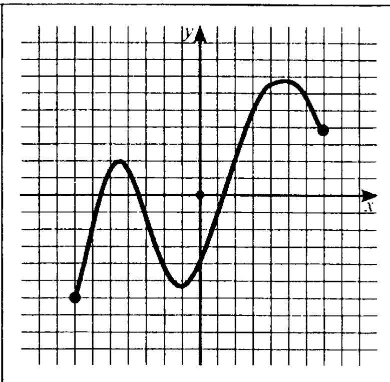
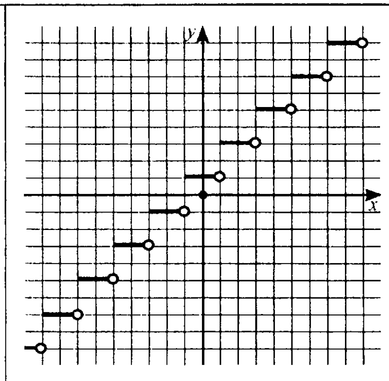
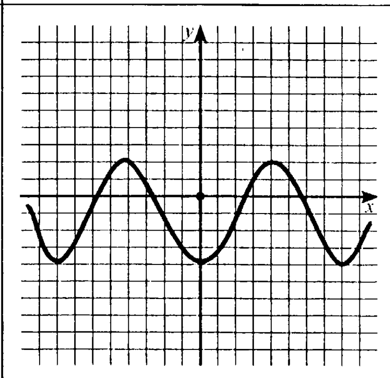
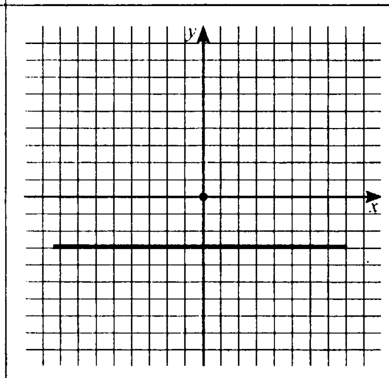
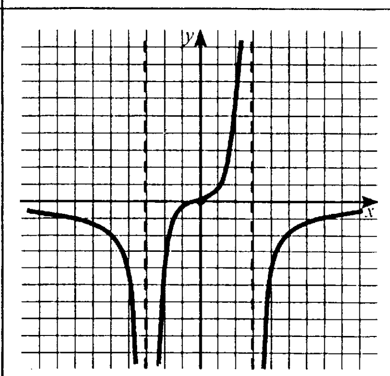
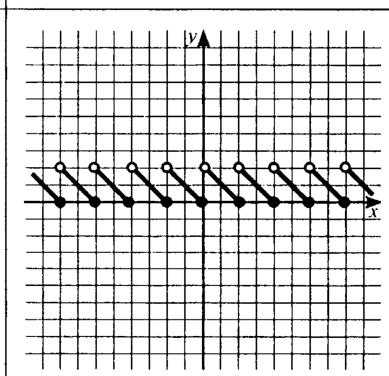
Задание № 12. На чертеже дан фрагмент четной функции $y = f(x)$, определите ее значение в точке $x = a$.

1	 $a = -3$	4	 $a = 4$
2	 $a = 2$	5	 $a = 4$
3	 $a = -1$	6	 $a = 3$

Задание № 13. На чертеже дан фрагмент нечетной функции $y = f(x)$, определите ее значение в точке $x = a$.

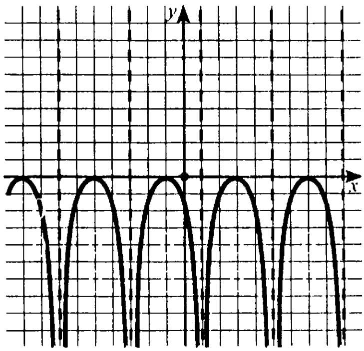
1	 $a = 6$	4	 $a = -4$
2	 $a = 2$	5	 $a = 4$
3	 $a = -1$	6	 $a = 5$

Задание № 14. Определите, какие функции являются периодическими.

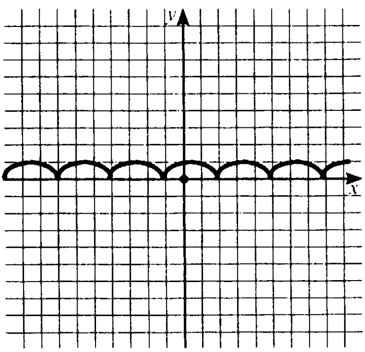
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 15. По чертежу периодической функции $y = f(x)$ определите значение ее основного периода.

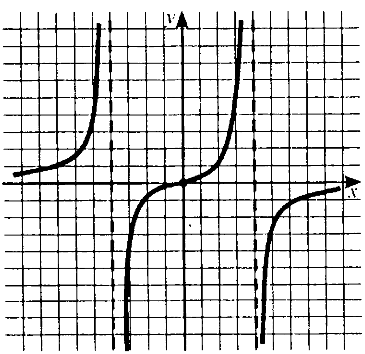
1



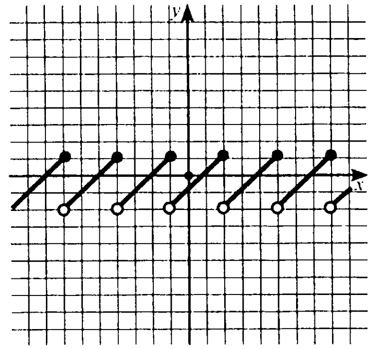
2



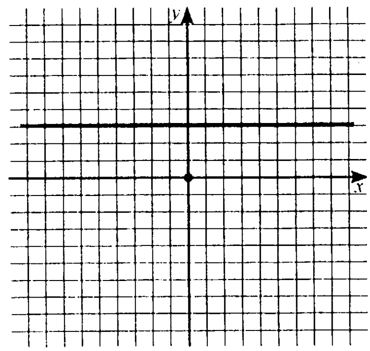
3



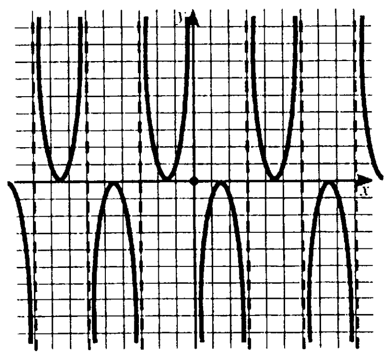
4



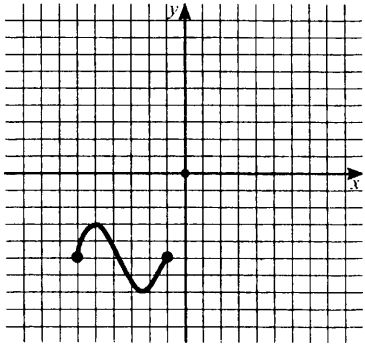
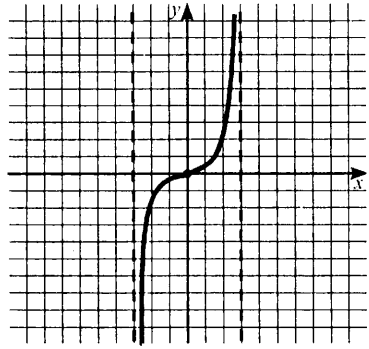
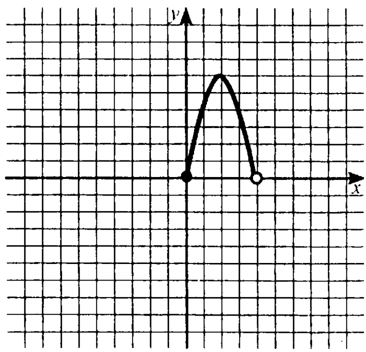
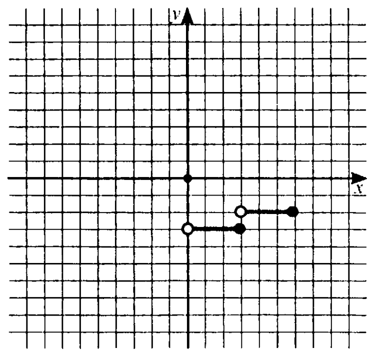
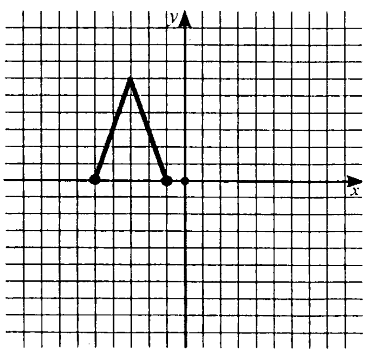
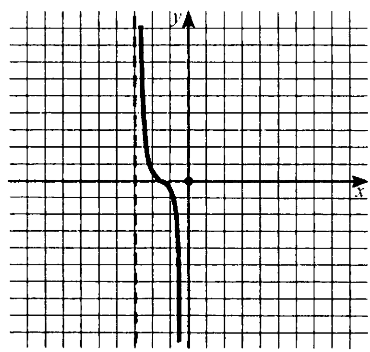
5



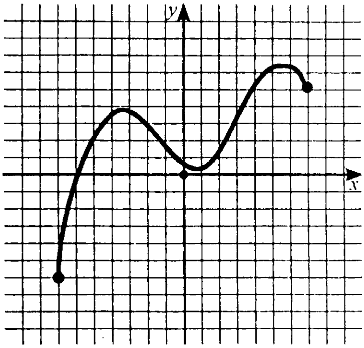
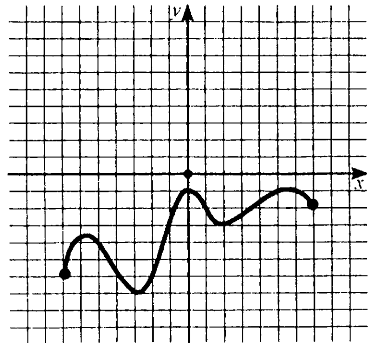
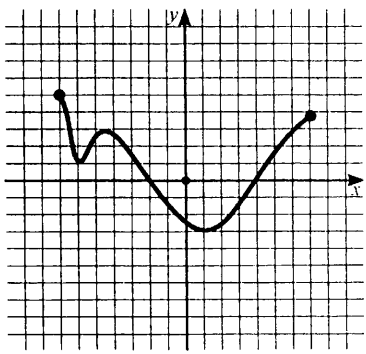
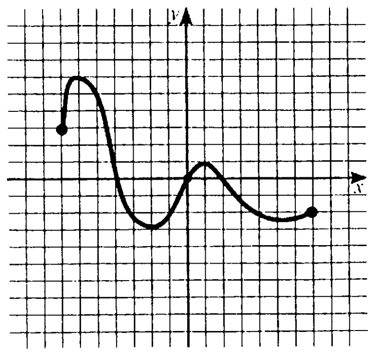
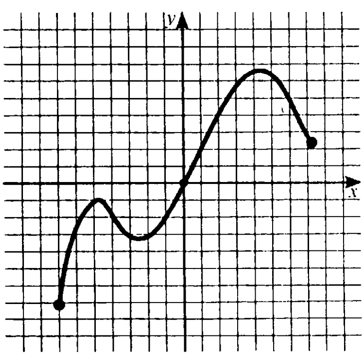
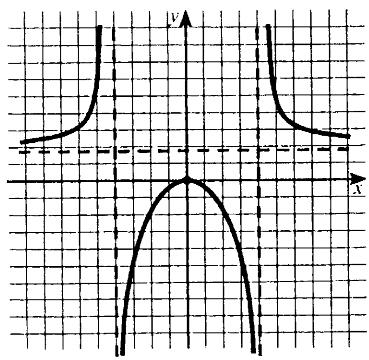
6



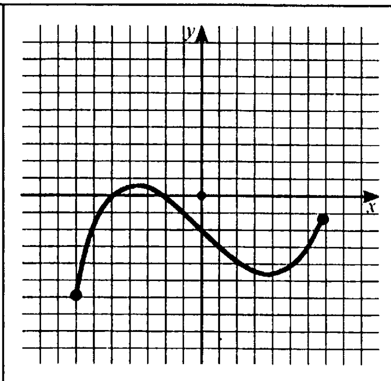
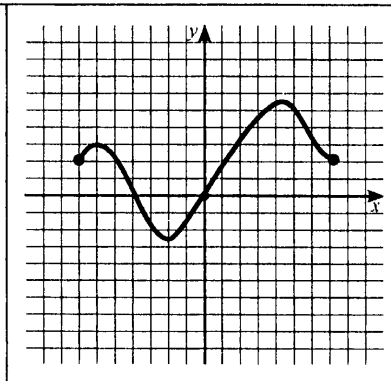
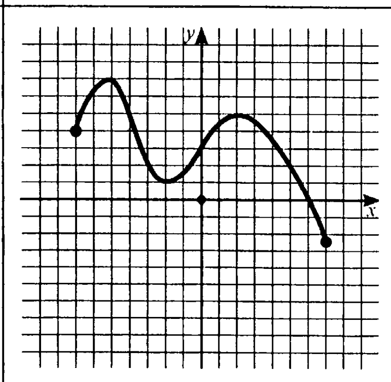
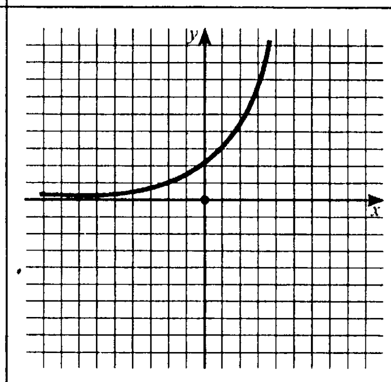
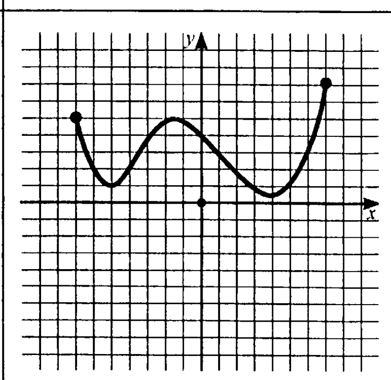
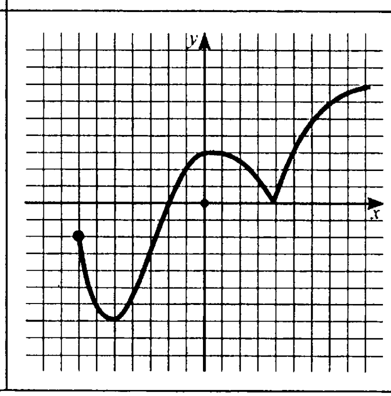
Задание № 16. На чертеже дан фрагмент периодической функции $y = f(x)$, определите ее значение в точке $x = a$.

1	 $a = 2$	4	 $a = 6$
2	 $a = -2$	5	 $a = -7$
3	 $a = 0$	6	 $a = 6$

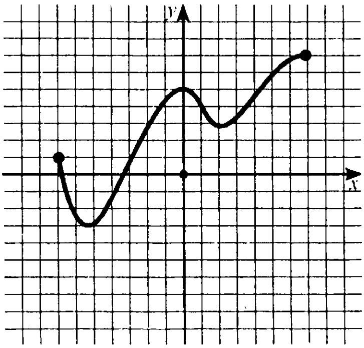
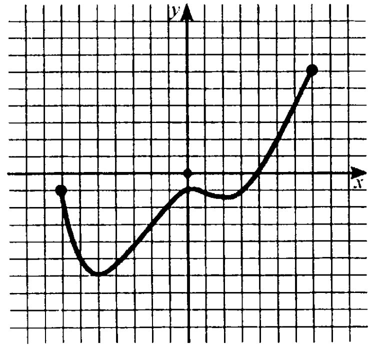
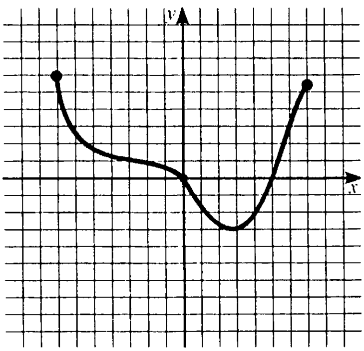
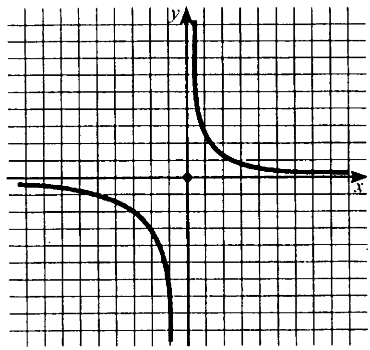
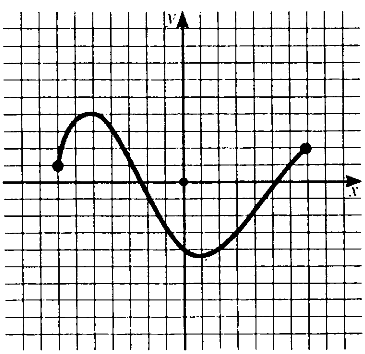
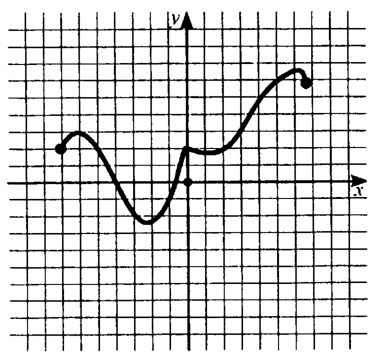
Задание № 17. По графику функции $y = f(x)$ определите значения аргументов, при которых выполняется равенство $f(x) = 0$.

1		4	
2		5	
3		6	

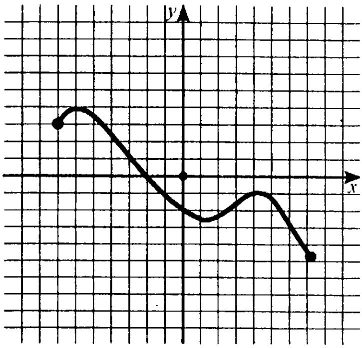
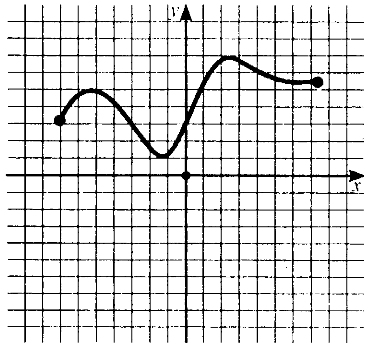
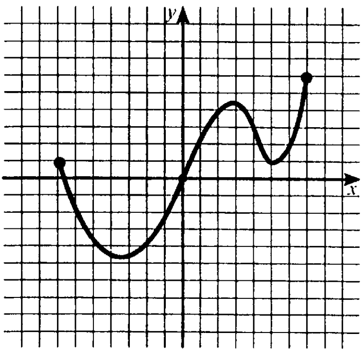
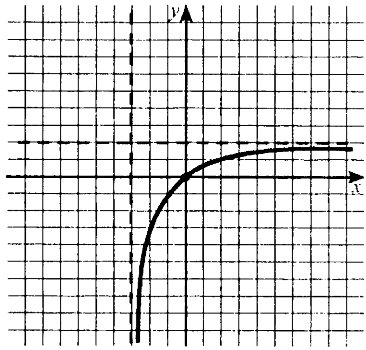
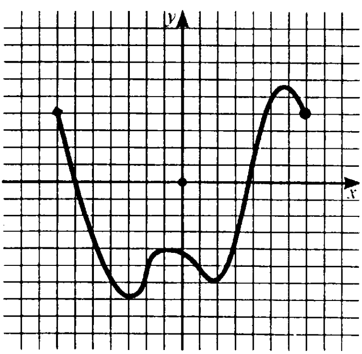
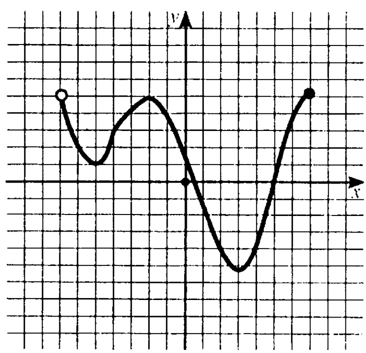
Задание № 18. По графику функции $y = f(x)$ определите ее нули.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 19. По графику функции $y = f(x)$ определите ее значения, при которых аргумент равен нулю.

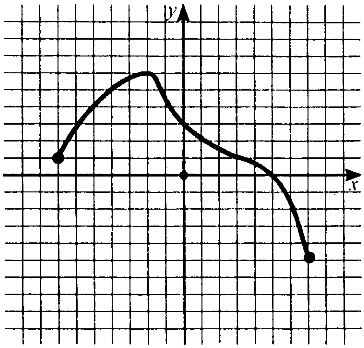
<table>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>6</td><td>
</td></tr>
</table>

Задание № 20. При помощи графика функции $y = f(x)$ найдите корни уравнения $f(x) = a$.

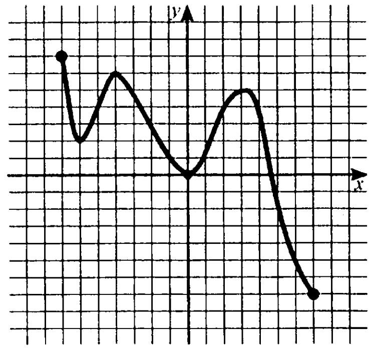
1	 $a = 1$	4	 $a = 3$
2	 $a = -2$	5	 $a = 2$
3	 $a = -7$	6	 $a = 5$

Задание № 21. По графику функции $y = f(x)$ определите ее промежутки возрастания.

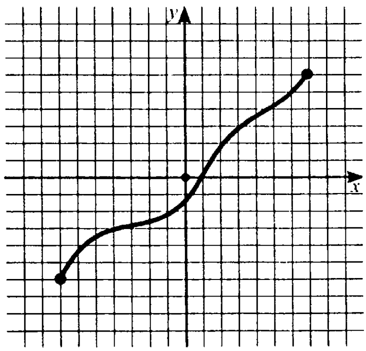
1



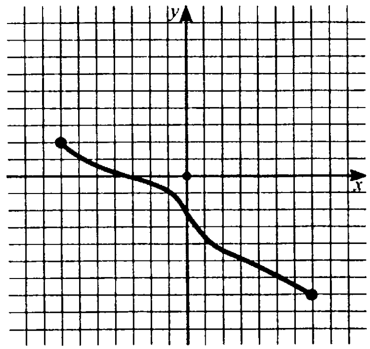
4



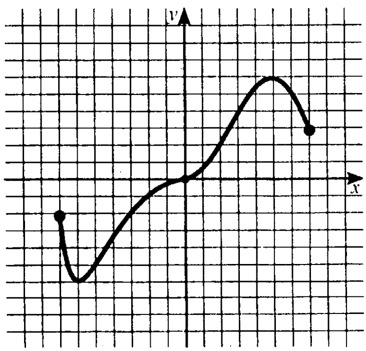
2



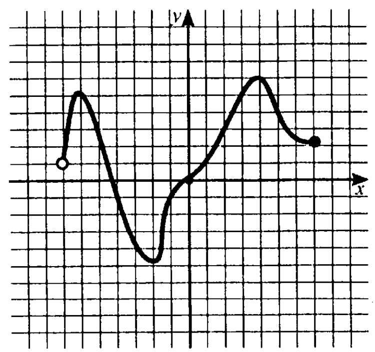
5



3

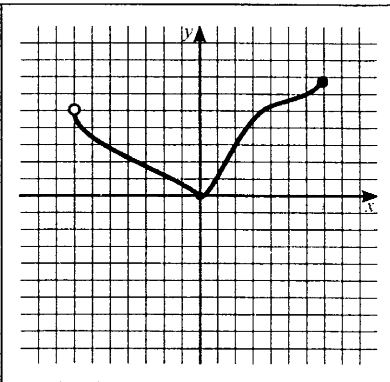


6

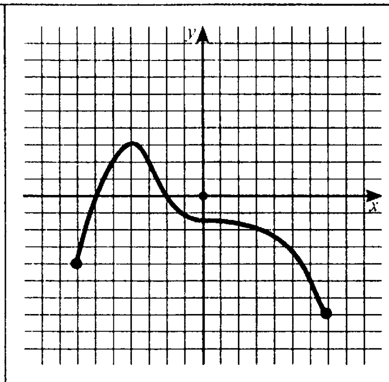


Задание № 22. По графику функции $y = f(x)$ определите ее промежутки убывания.

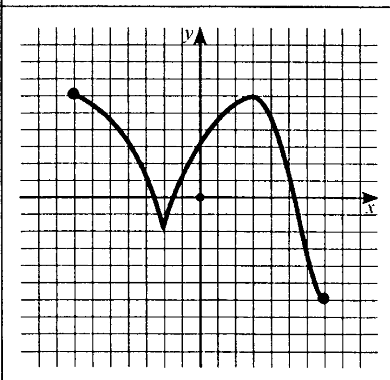
1



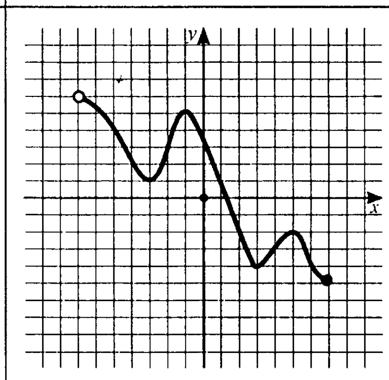
4



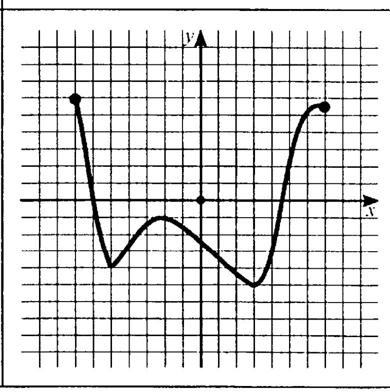
2



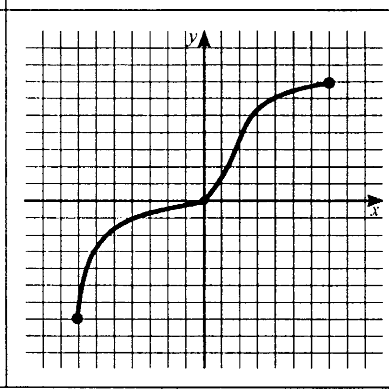
5



3

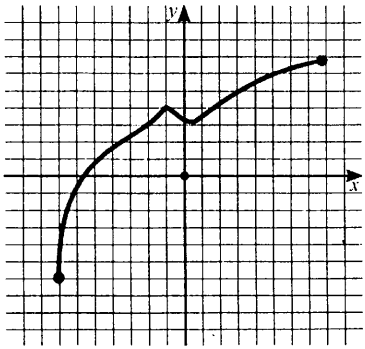


6

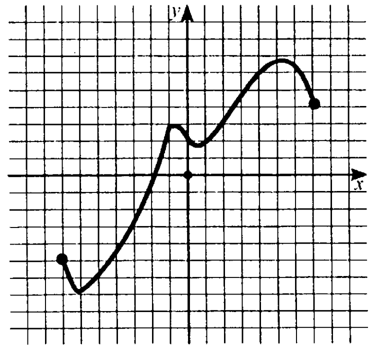


Задание № 23. Среди функций выберите те, которые возрастают на числовых промежутках $(-5; -2) \cup (1; 4)$.

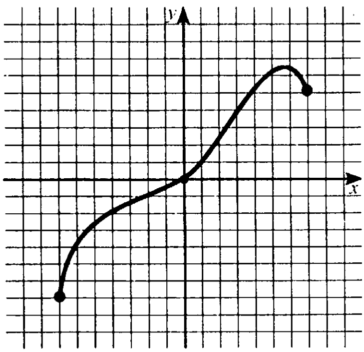
1



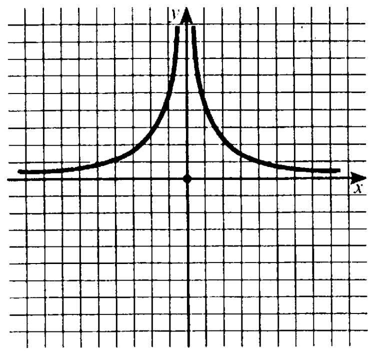
4



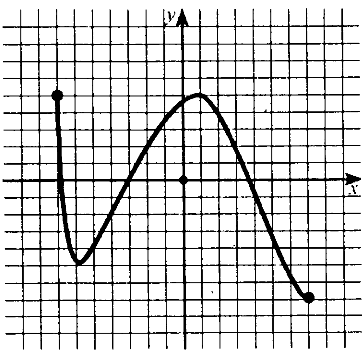
2



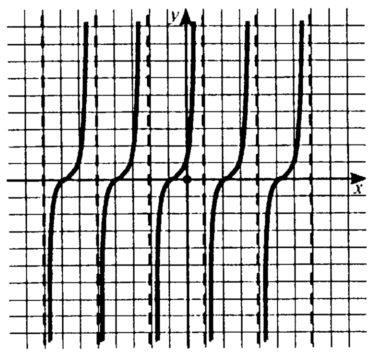
5



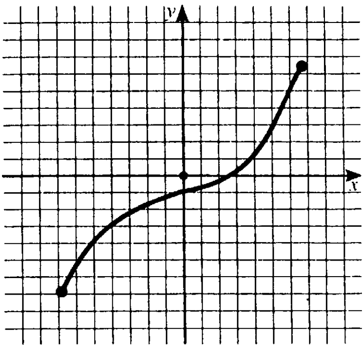
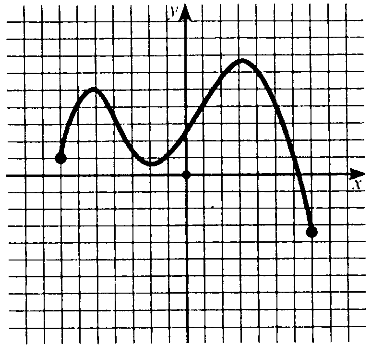
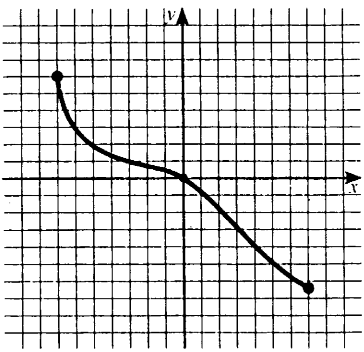
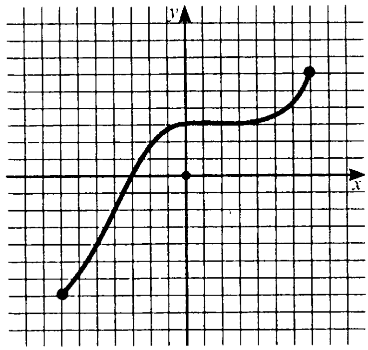
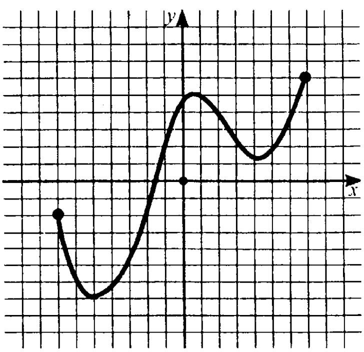
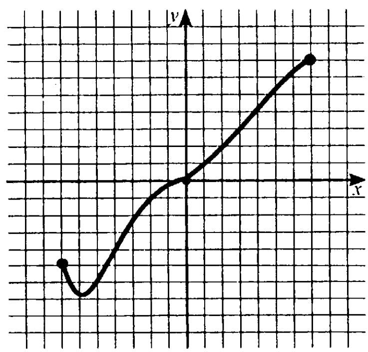
3



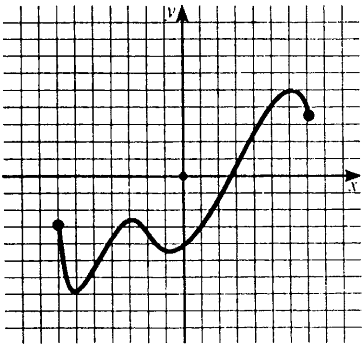
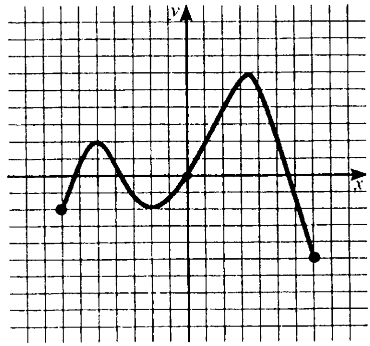
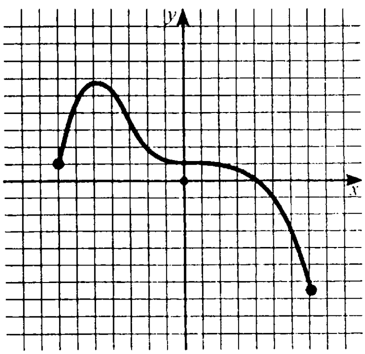
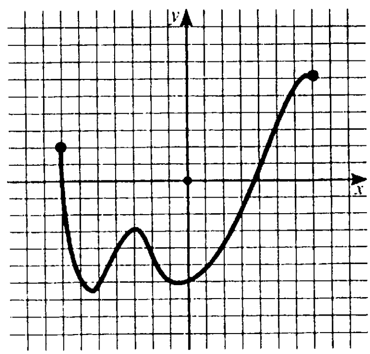
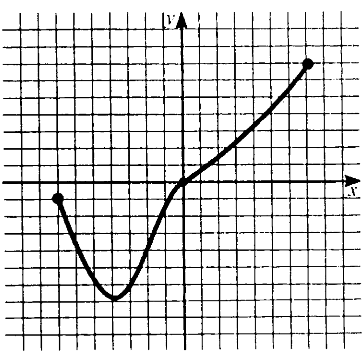
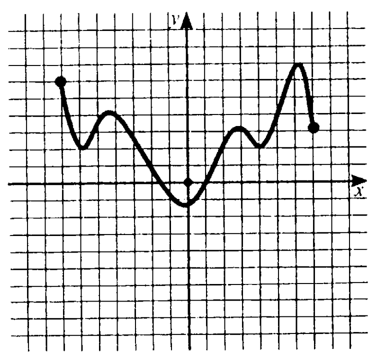
6



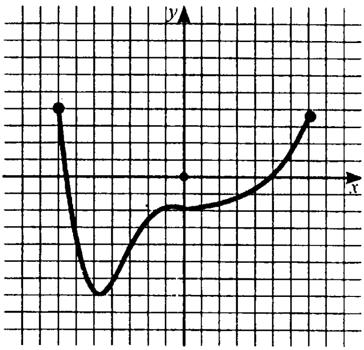
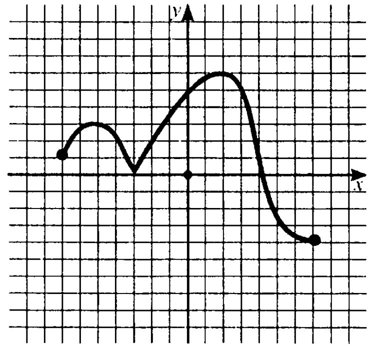
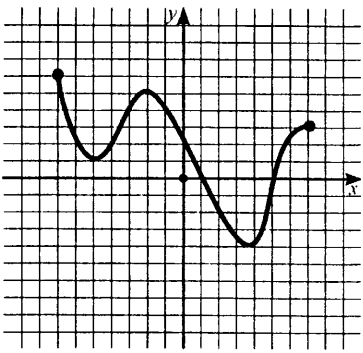
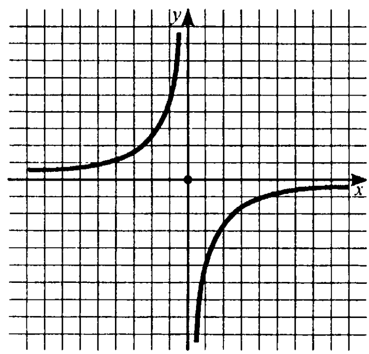
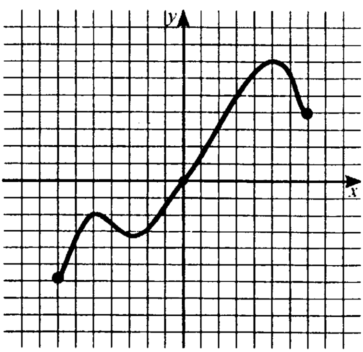
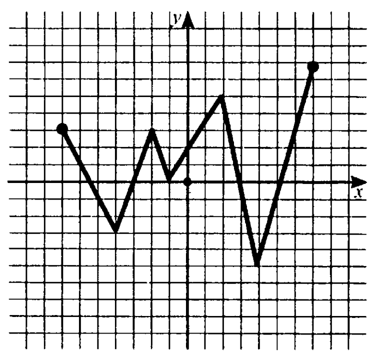
Задание № 24. Среди графиков функций $y = f(x)$ выберите те, которые являются монотонно возрастающими.

1		4	
2		5	
3		6	

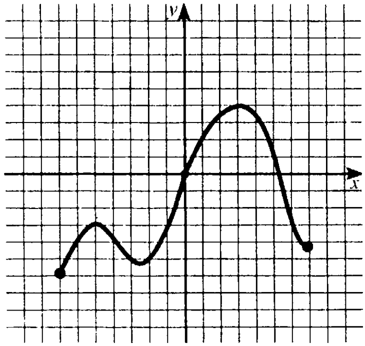
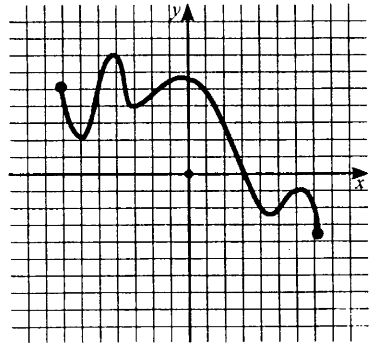
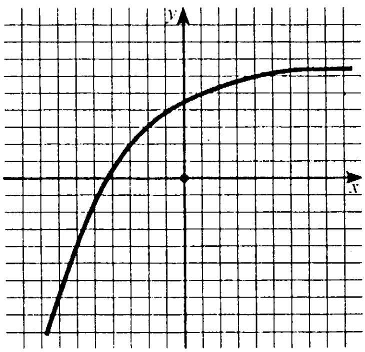
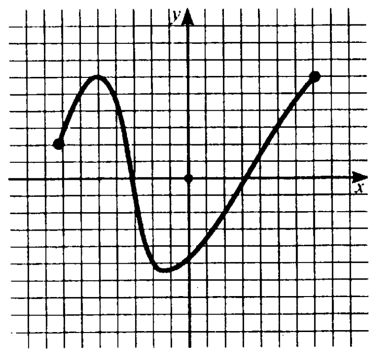
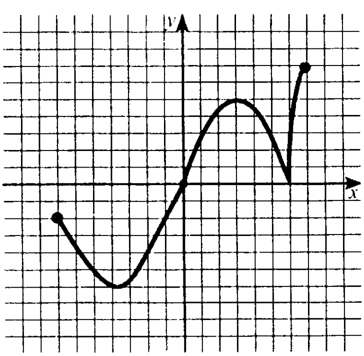
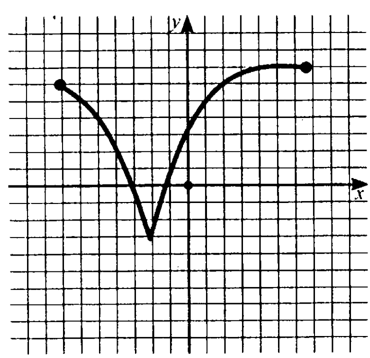
Задание № 25. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек максимумов.

1		4	
2		5	
3		6	

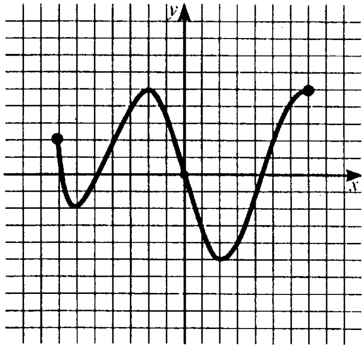
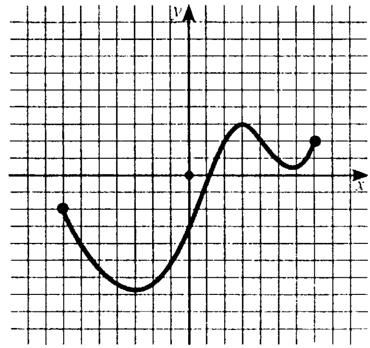
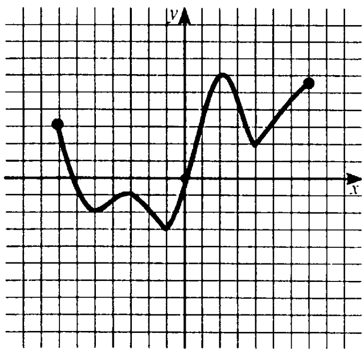
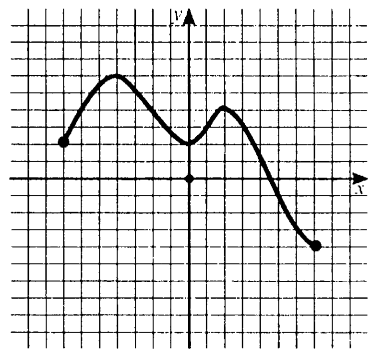
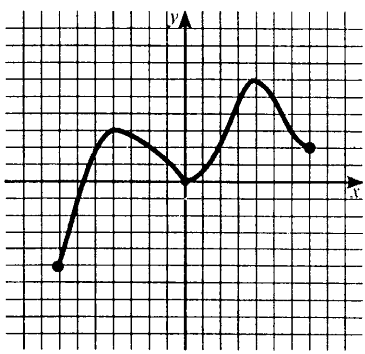
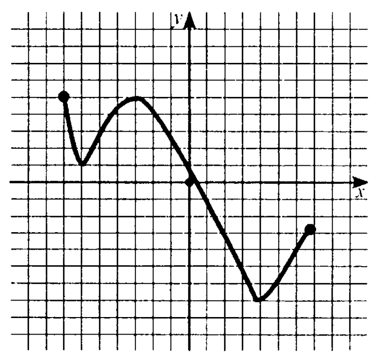
Задание № 26. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек минимумов.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 27. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек экстремумов.

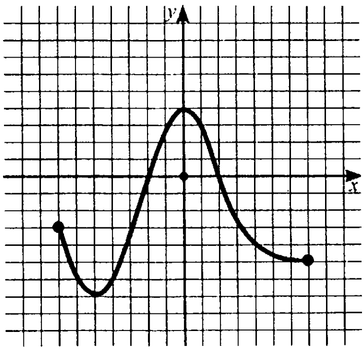
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 28. Найдите сумму всех аргументов, входящих во множество экстремумов функции $y = f(x)$.

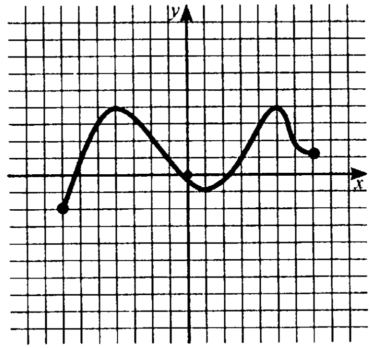
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 29. По графику функции $y = f(x)$ определите ее наибольшее значение.

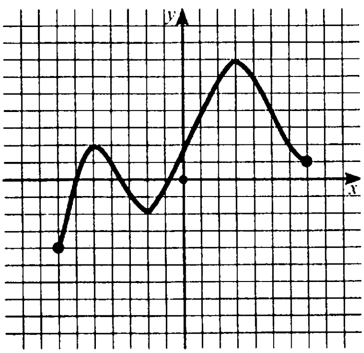
1



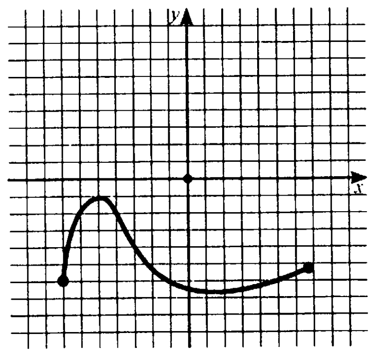
4



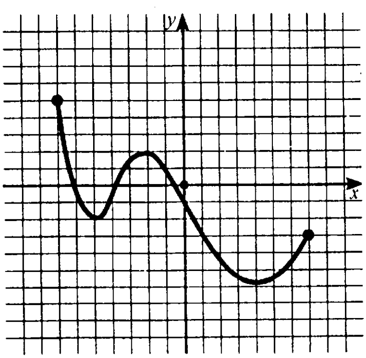
2



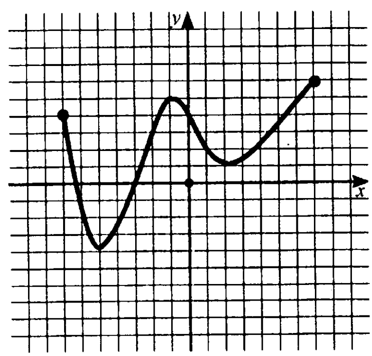
5



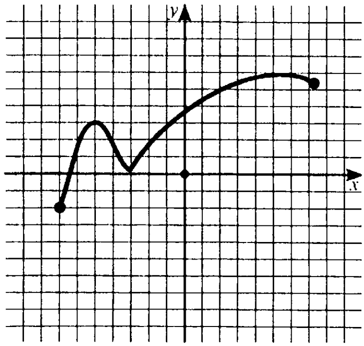
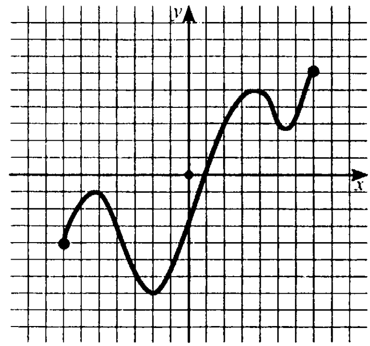
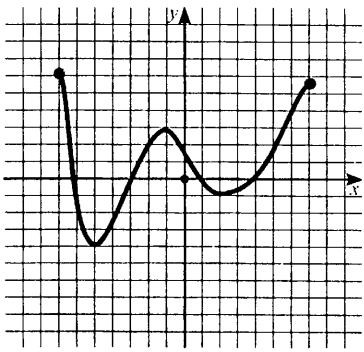
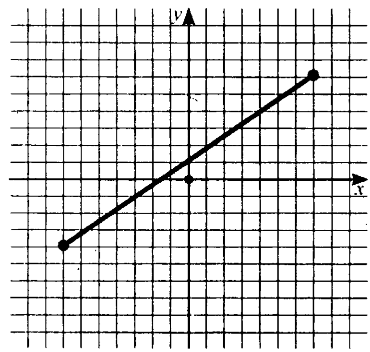
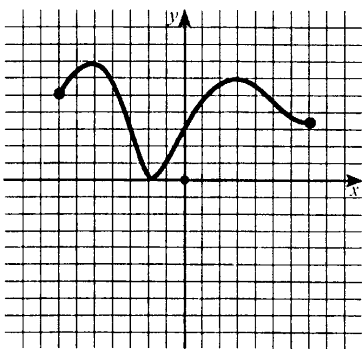
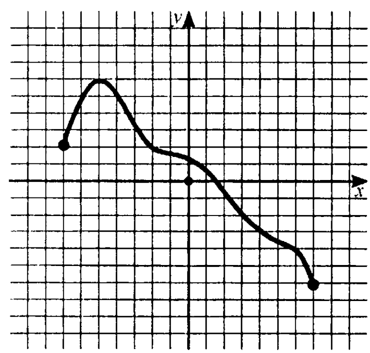
3



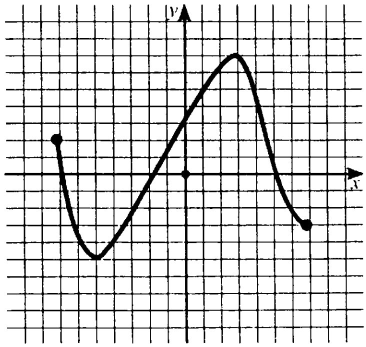
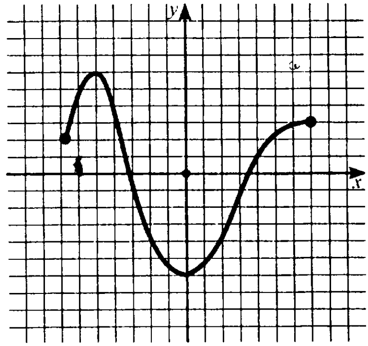
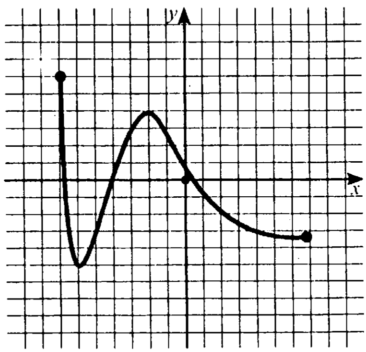
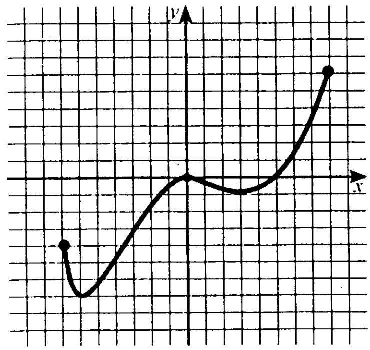
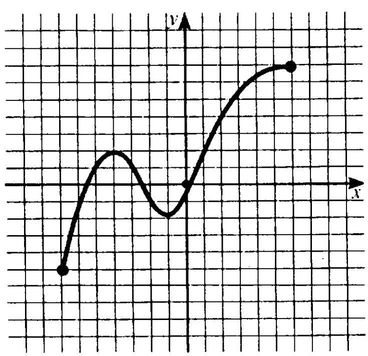
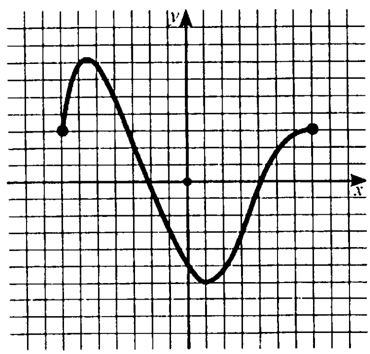
6



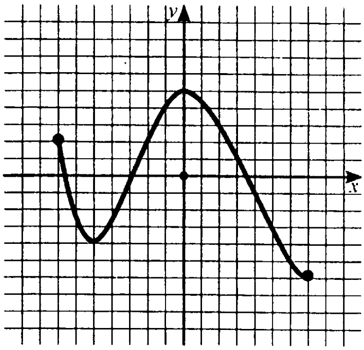
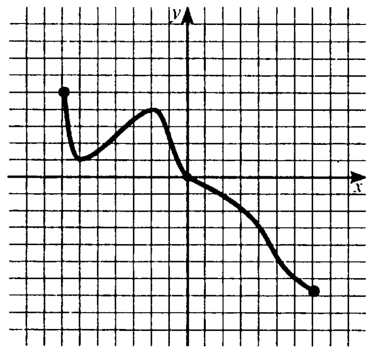
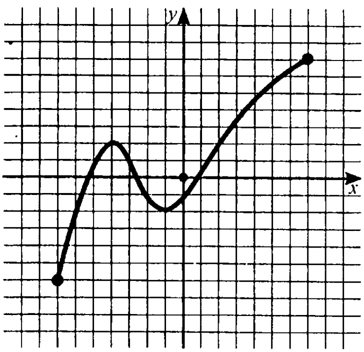
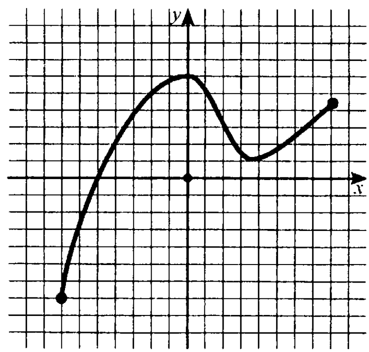
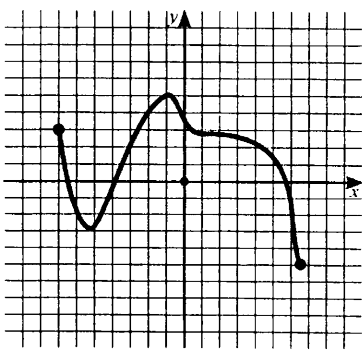
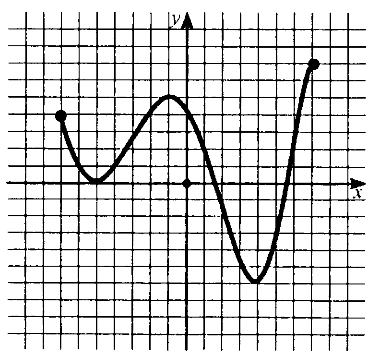
Задание № 30. По графику функции $y = f(x)$ определите ее наименьшее значение.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 31. По графику функции $y = f(x)$ определите сумму ее наибольшего и наименьшего значений.

1		4	
2		5	
3		6	

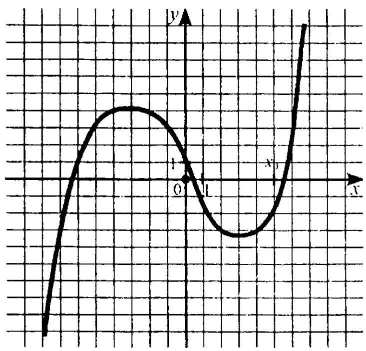
Задание № 32. По графику функции $y = f(x)$ определите значение аргумента, при котором функция достигает своего наибольшего значения.

1		4	
2		5	
3		6	

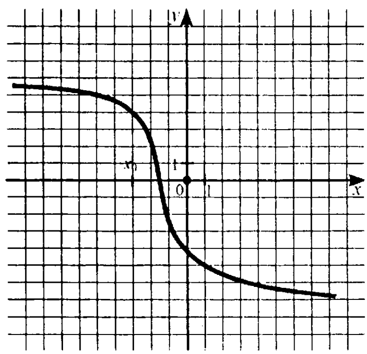
II. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Задание № 33. Определите значение предела функции в точке x_0.

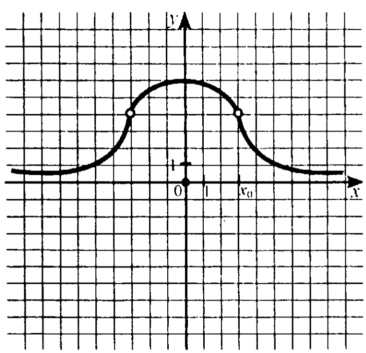
1



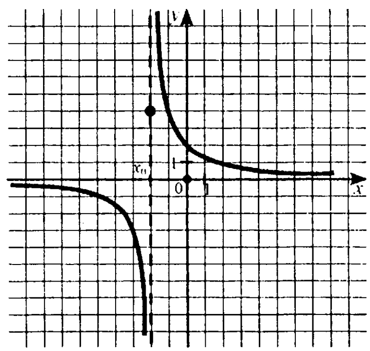
2



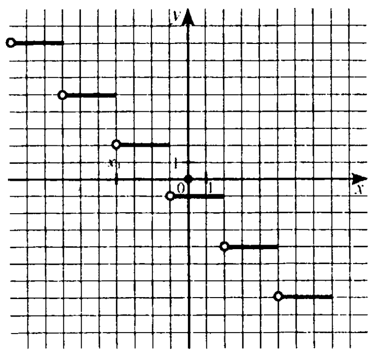
3



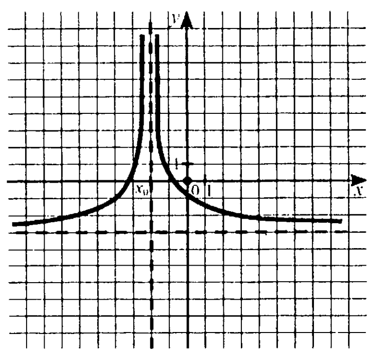
4



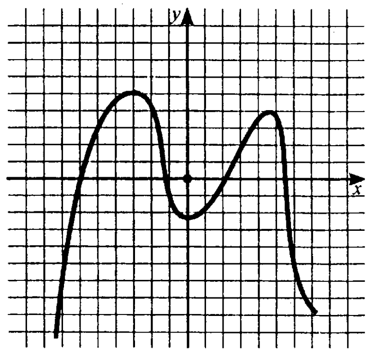
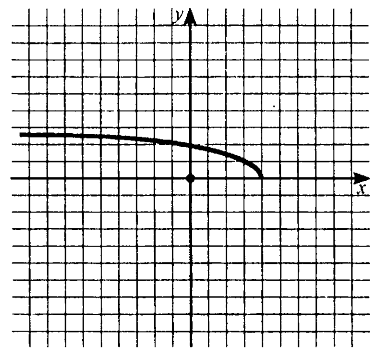
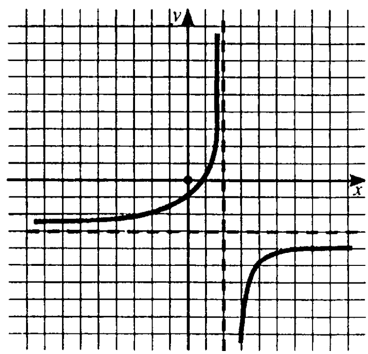
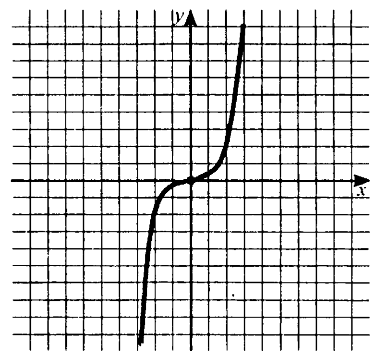
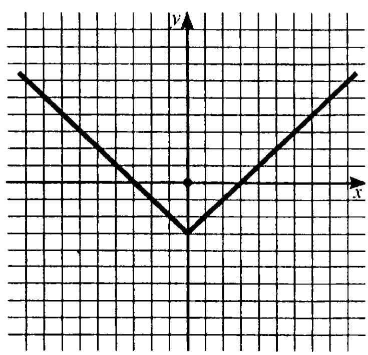
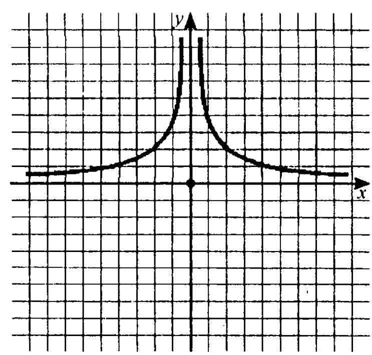
5



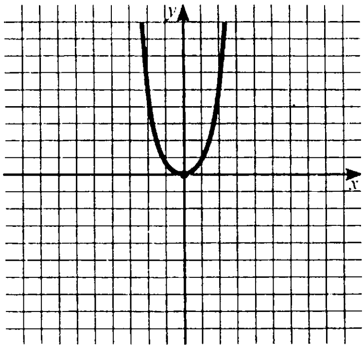
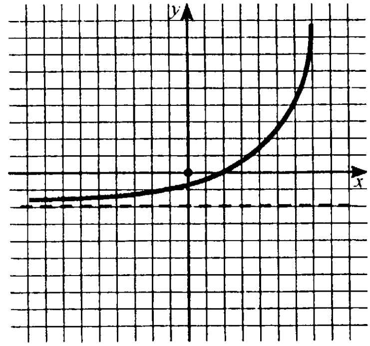
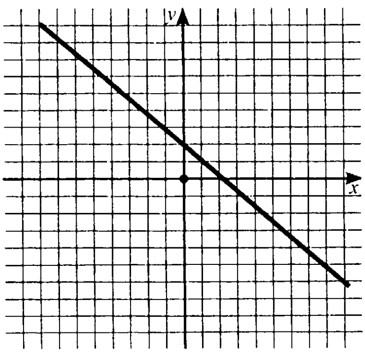
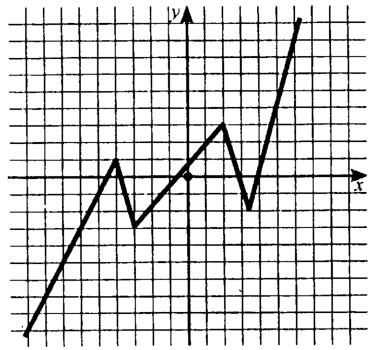
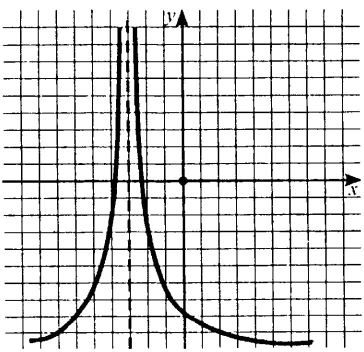
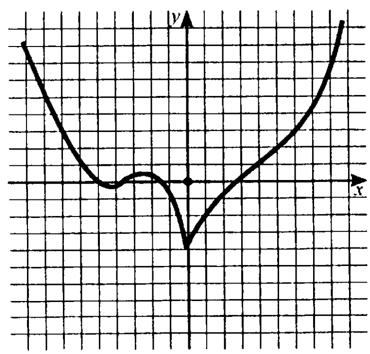
6



Задание № 34. Определите значение предела функции $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

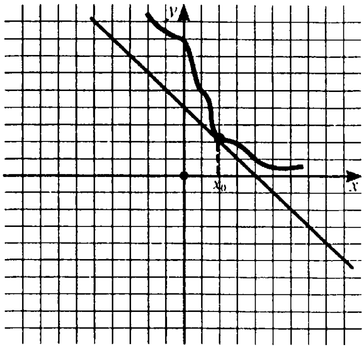
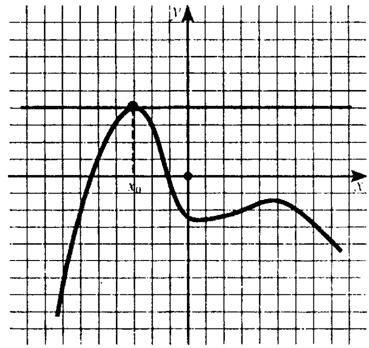
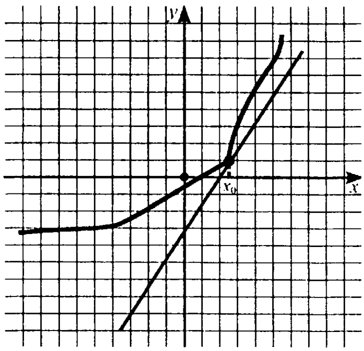
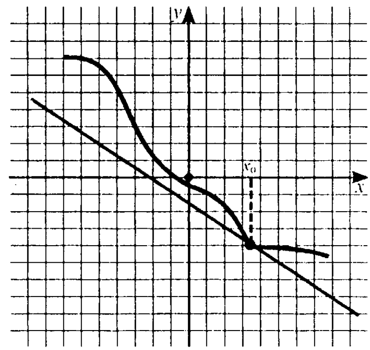
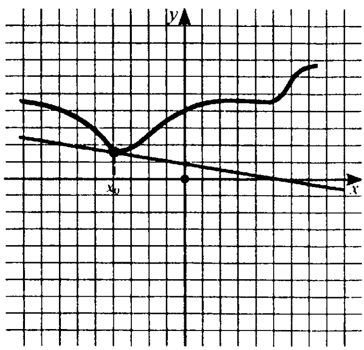
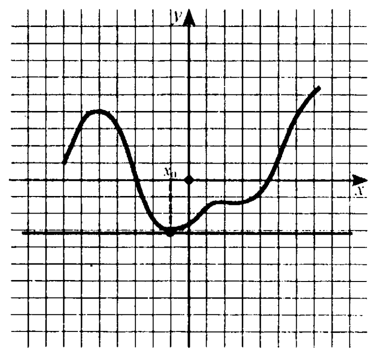
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 35. Определите значение предела функции $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

1		4	
2		5	
3		6	

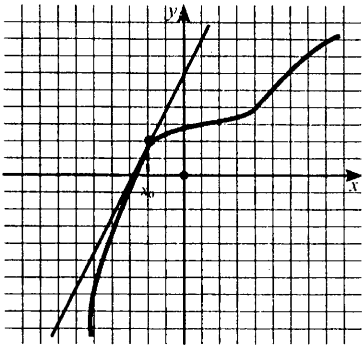
III. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Задание № 36. Определите тангенс угла наклона касательной функции в точке x_0.

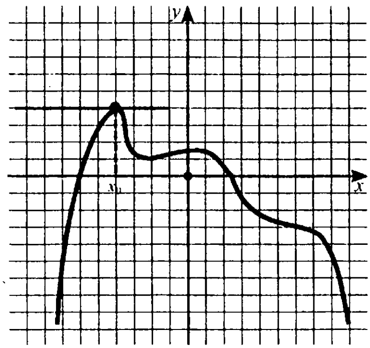
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 37. Определите значение производной функции в точке x_0.

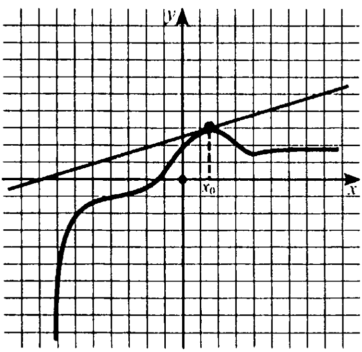
1



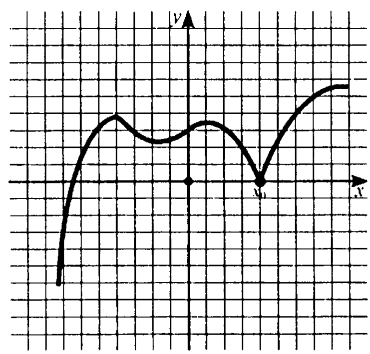
4



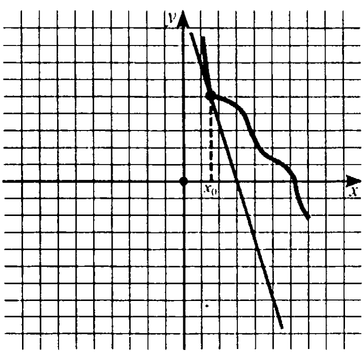
2



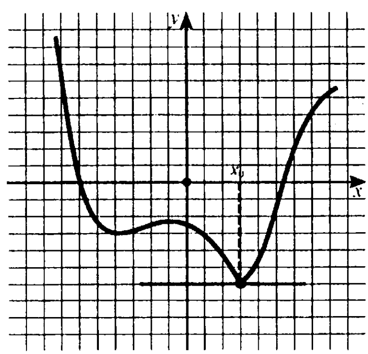
5



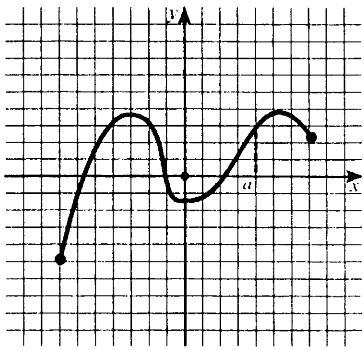
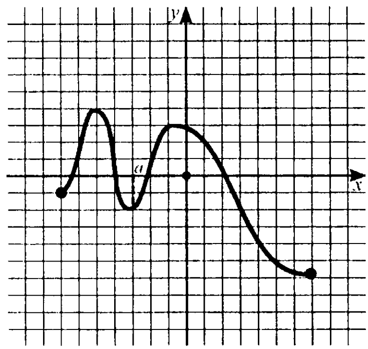
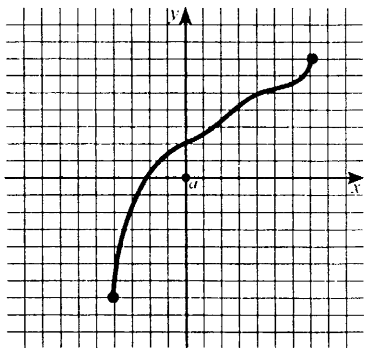
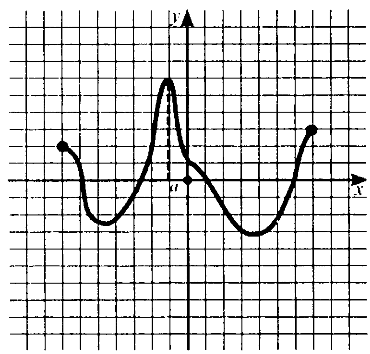
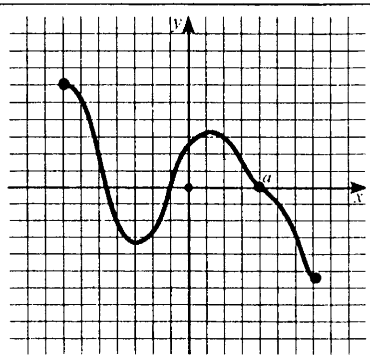
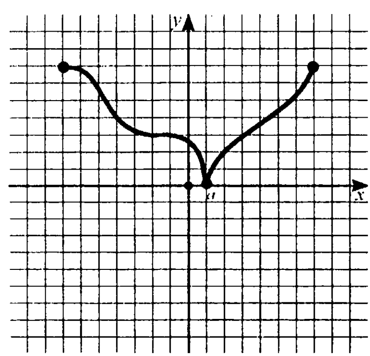
3



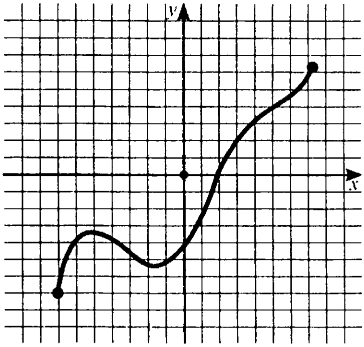
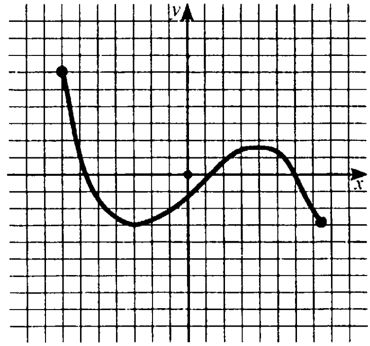
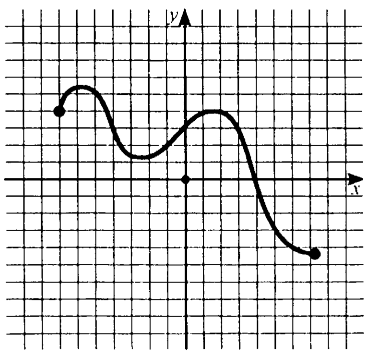
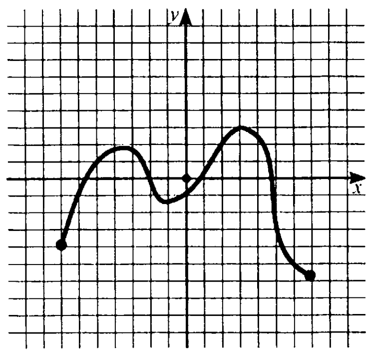
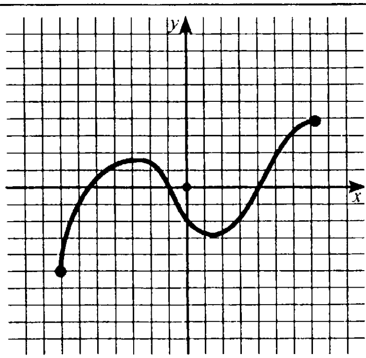
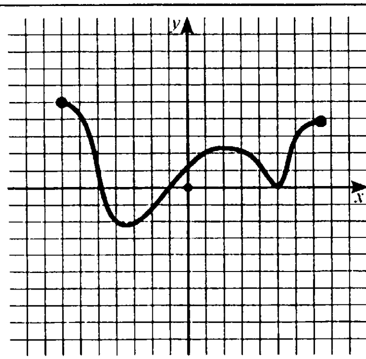
6



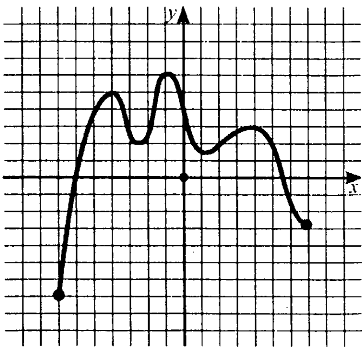
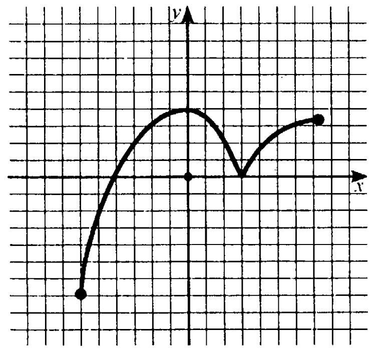
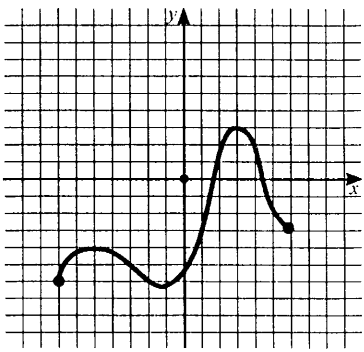
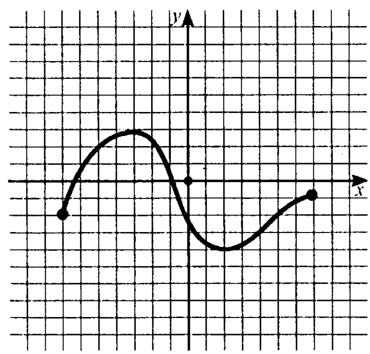
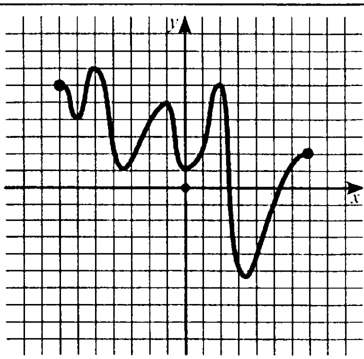
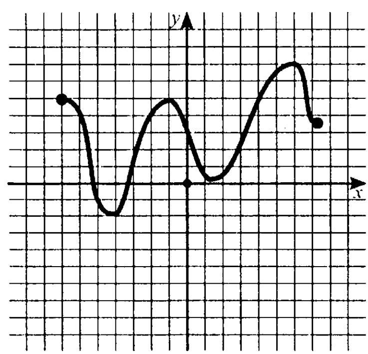
Задание № 38. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $x = a$.

1		4	
2		5	
3		6	

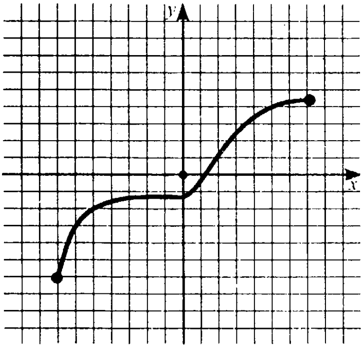
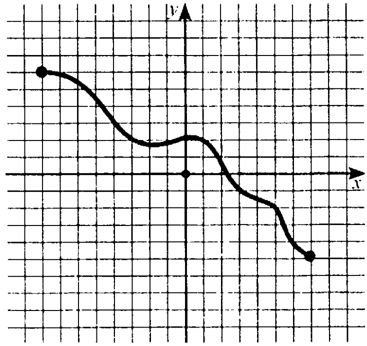
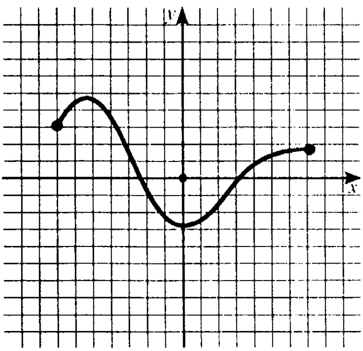
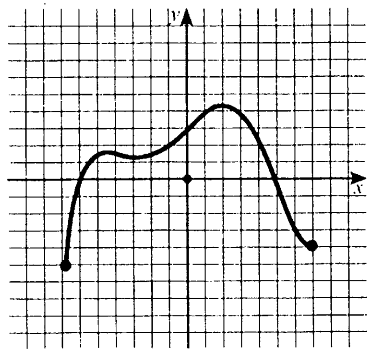
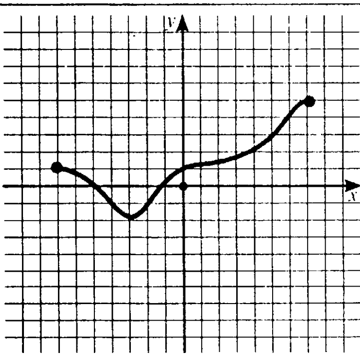
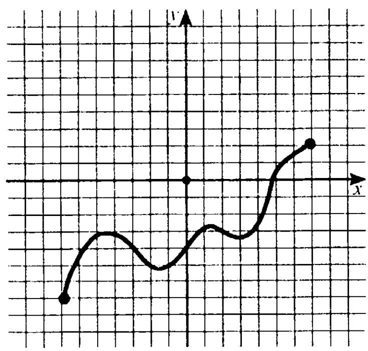
Задание № 39. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите количество точек, в которых коэффициент касательной, проведенной к графику функции, равен a.

1	 $a = 2$	4	 $a = -2$
2	 $a = 3$	5	 $a = -2$
3	 $a = 6$	6	 $a = 0$

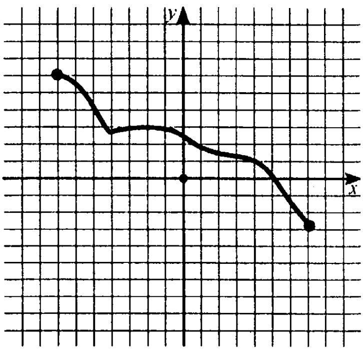
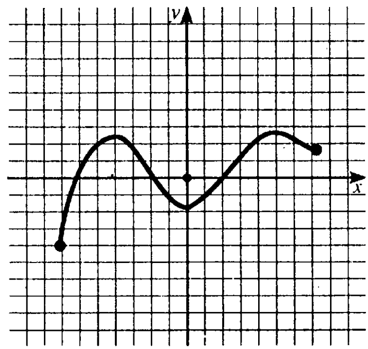
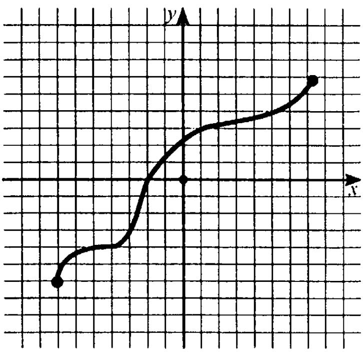
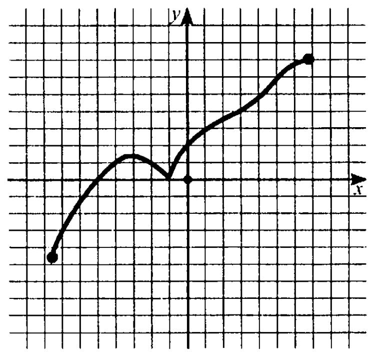
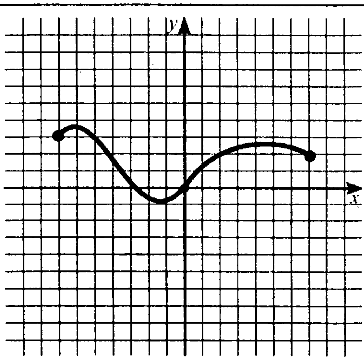
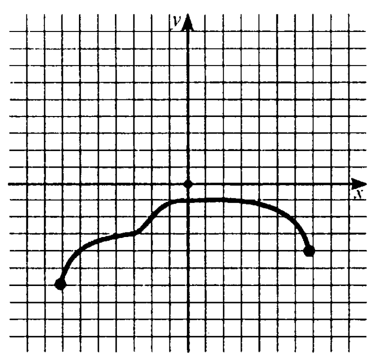
Задание № 40. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите точку, в которой касательная к графику функции имеет наибольший угловой коэффициент.

1		4	
2		5	
3		6	

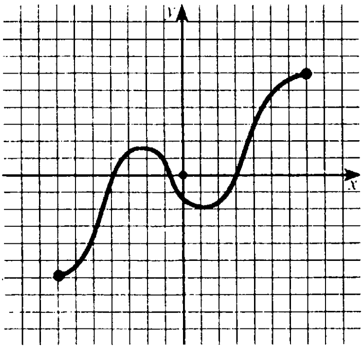
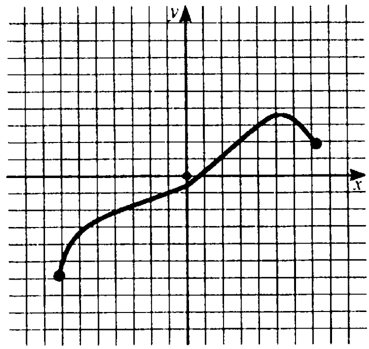
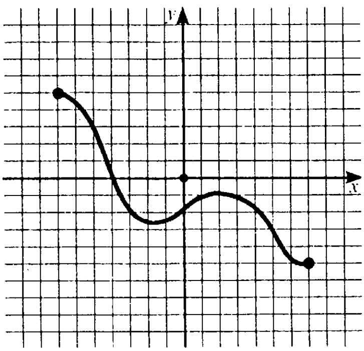
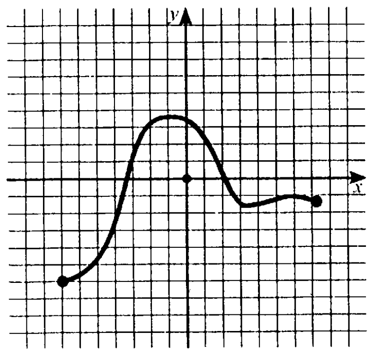
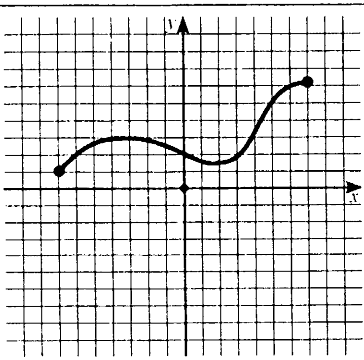
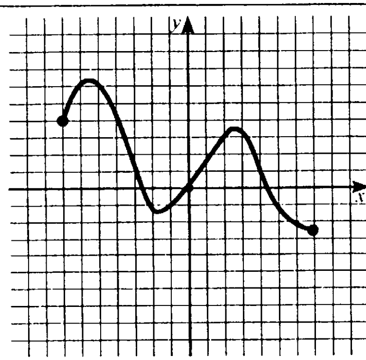
Задание № 41. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите, в каких точках график функции имеет касательные, проведенные под углом α относительно положительной части оси абсцисс.

1	 $\alpha = 45°$	4	 $\alpha = -45°$
2	 $\alpha = 0°$	5	 $\alpha = \pi$
3	 $\alpha = 135°$	6	 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

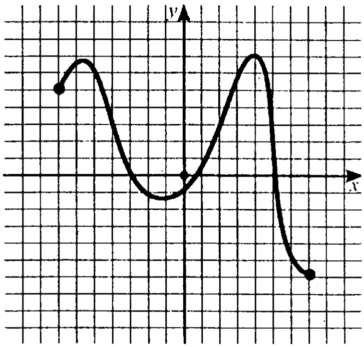
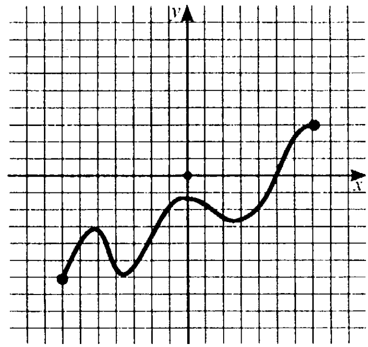
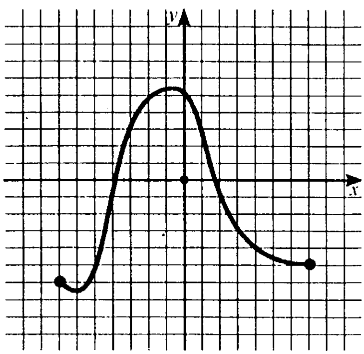
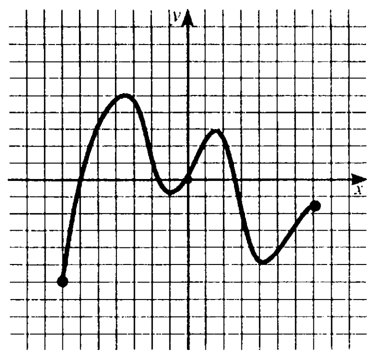
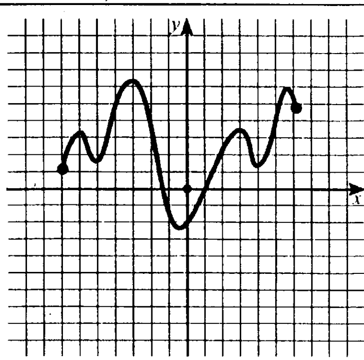
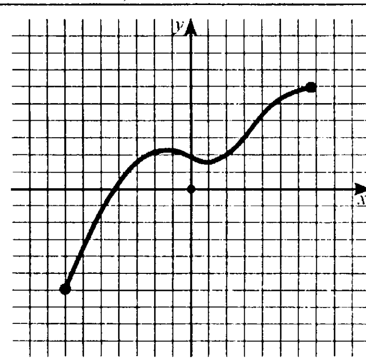
Задание № 42. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите, в каких точках график функции имеет касательные, параллельные оси абсцисс.

1		4	
2		5	
3		6	

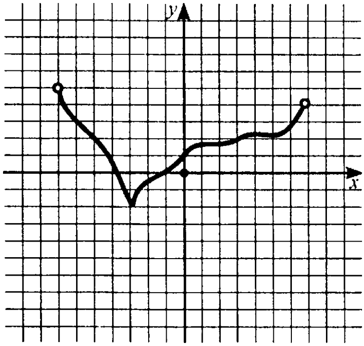
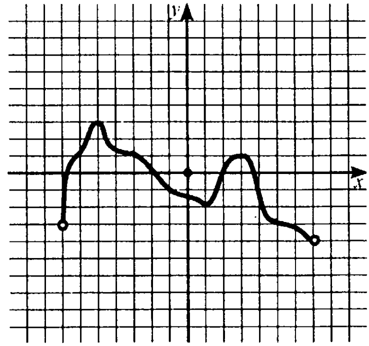
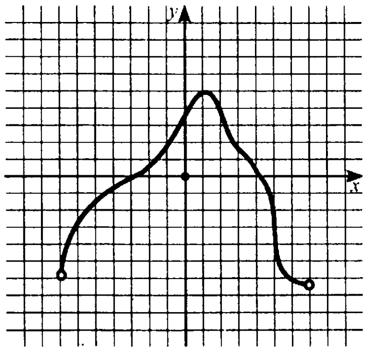
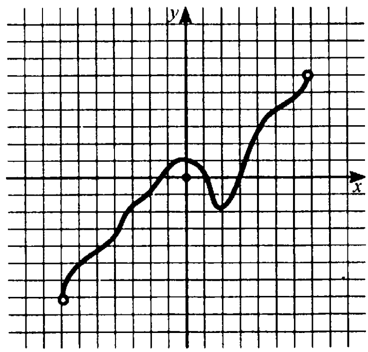
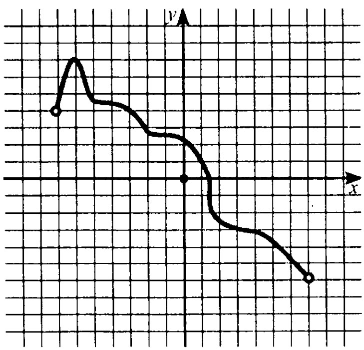
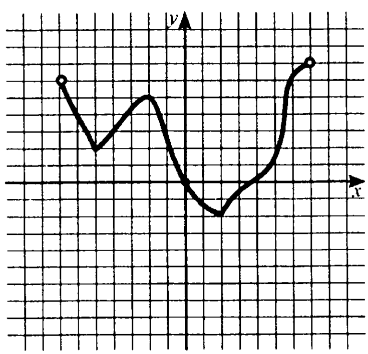
Задание № 43. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите количество точек, в которых касательные, проведенные к графику функции, параллельны прямой $y = a$ или совпадают с ней.

1	 $a = 4$	4	 $a = 0$
2	 $a = -1$	5	 $a = 3\sqrt{2}$
3	 $a = 7$	6	 $a = 0,(3)$

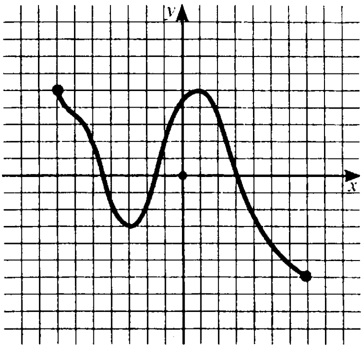
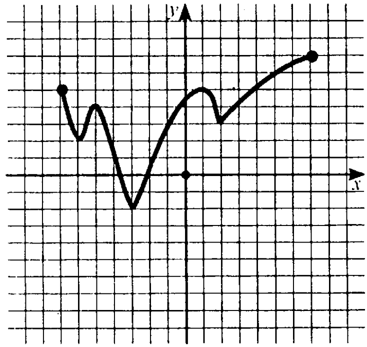
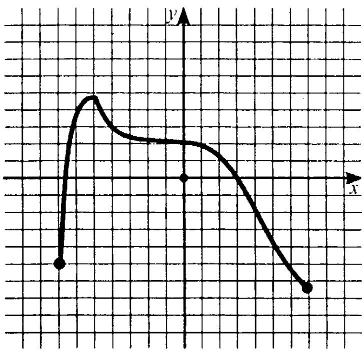
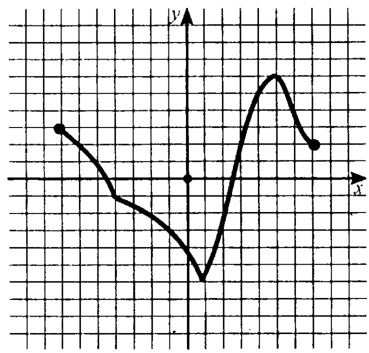
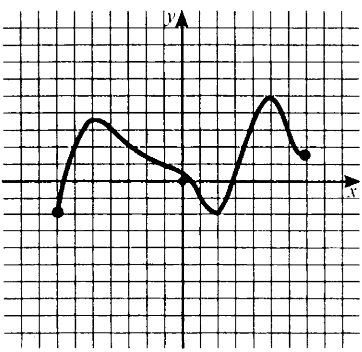
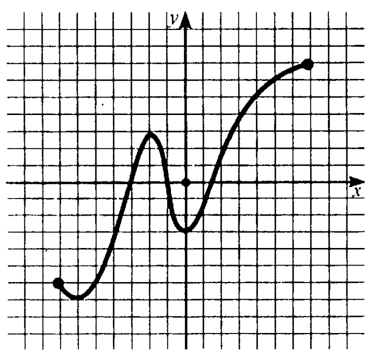
Задание № 44. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите количество касательных, проведенных к графику функции, которые параллельны прямой $y = ax + b$ или совпадают с ней.

1	 $a = 2,\ b = -1$	4	 $a = 4,\ b = 9$
2	 $a = 1,\ b = 4$	5	 $a = -4,\ b = 10$
3	 $a = 2,\ b = -3$	6	 $a = -5,\ b = 13$

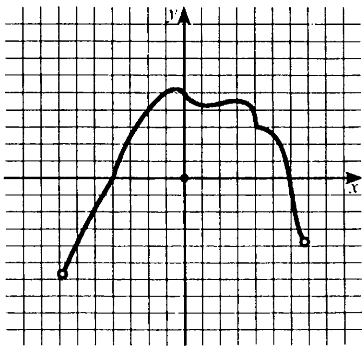
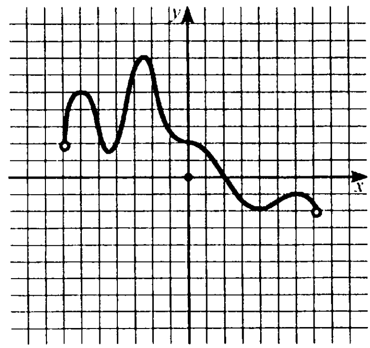
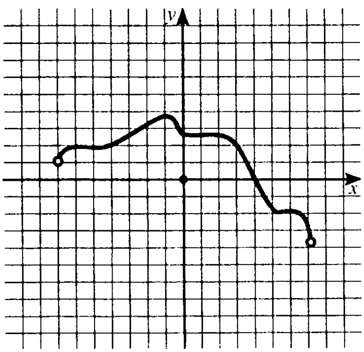
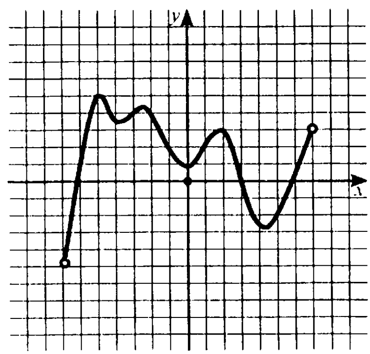
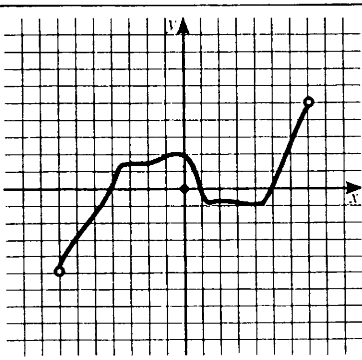
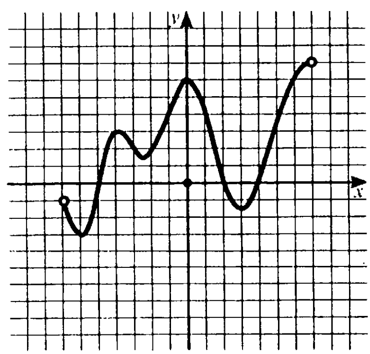
Задание № 45. По графику функции $y = f(x)$ определите числовые промежутки, на которых производная функции имеет отрицательный знак.

1		4	
2		5	
3		6	

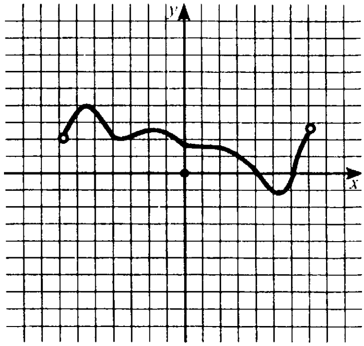
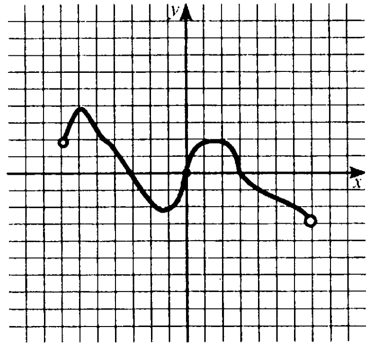
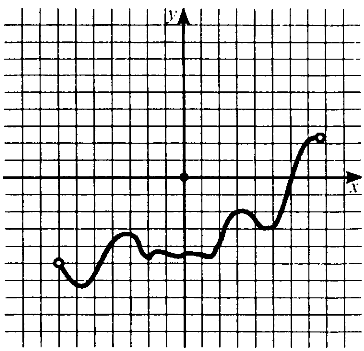
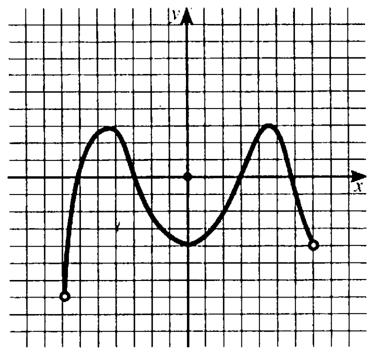
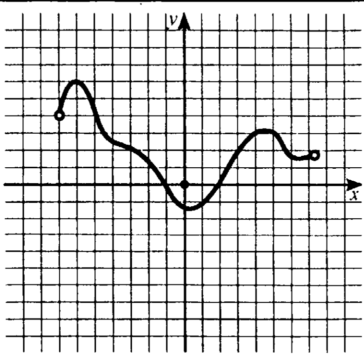
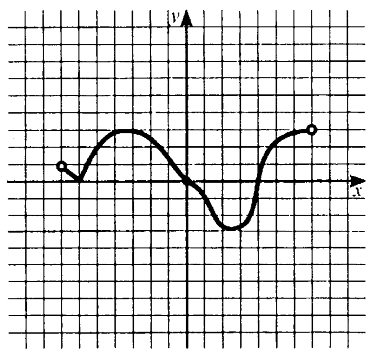
Задание № 46. По графику функции $y = f(x)$ определите числовые промежутки, на которых производная функции имеет положительный знак.

1		4	
2		5	
3		6	

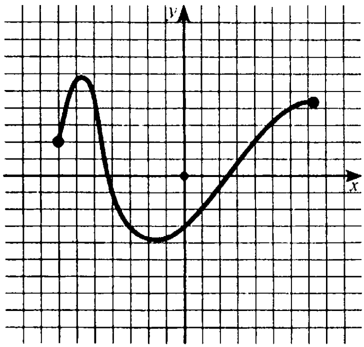
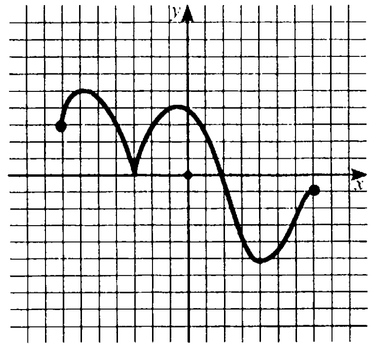
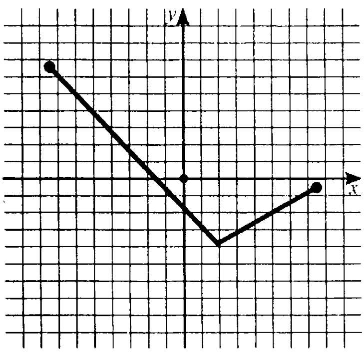
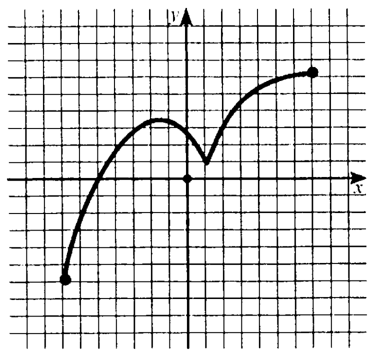
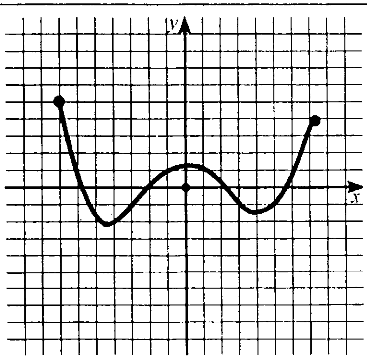
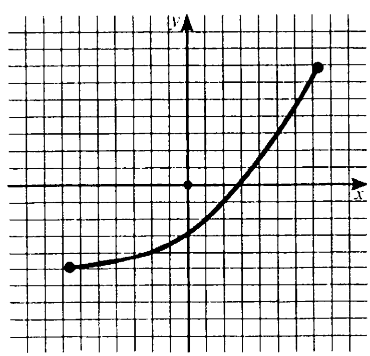
Задание № 47. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция возрастает.

1		4	
2		5	
3		6	

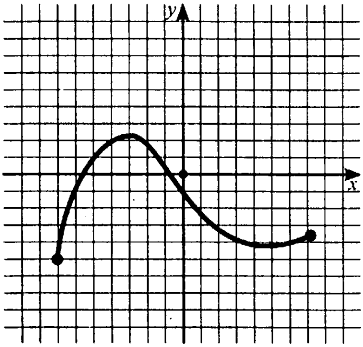
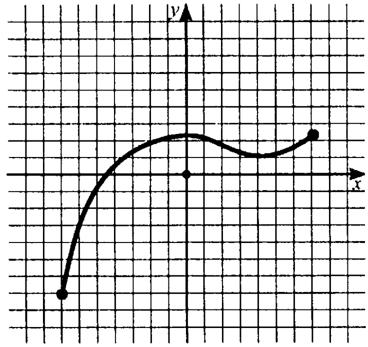
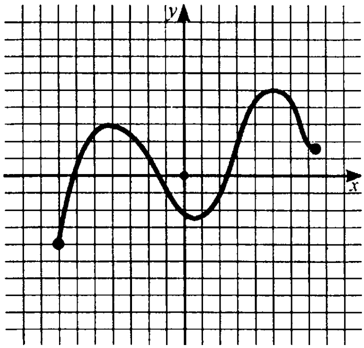
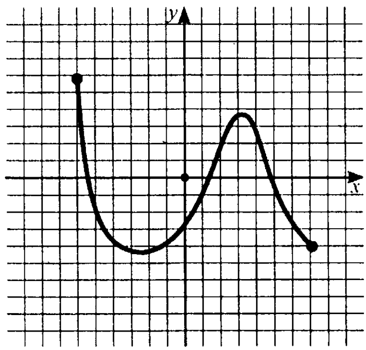
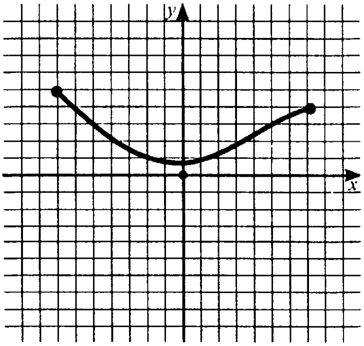
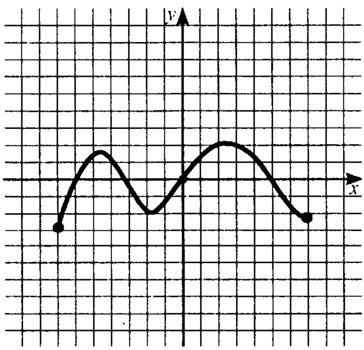
Задание № 48. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция убывает.

1		4	
2		5	
3		6	

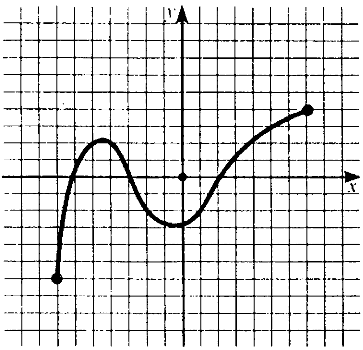
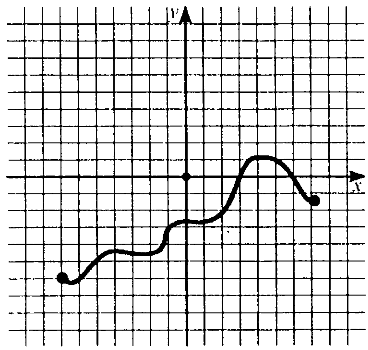
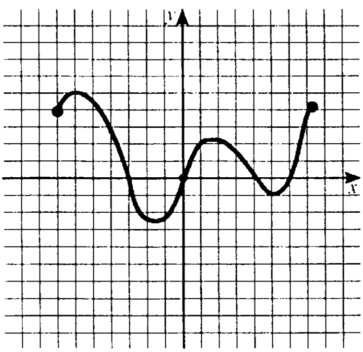
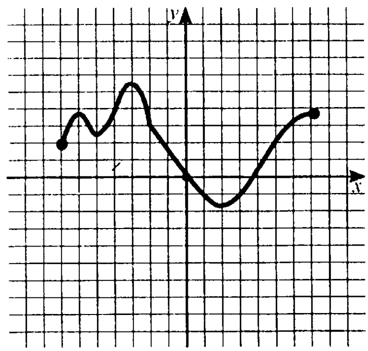
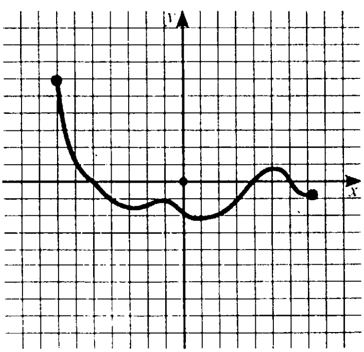
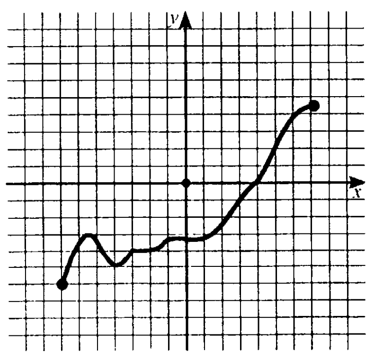
Задание № 49. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек, в которых производная функции равна нулю или не существует.

1		4	
2		5	
3		6	

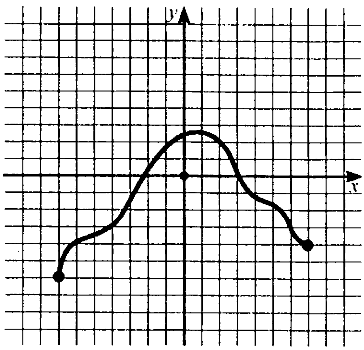
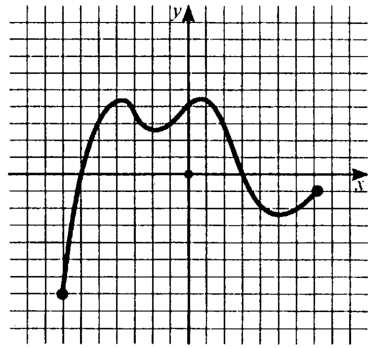
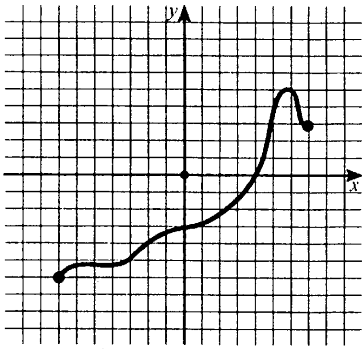
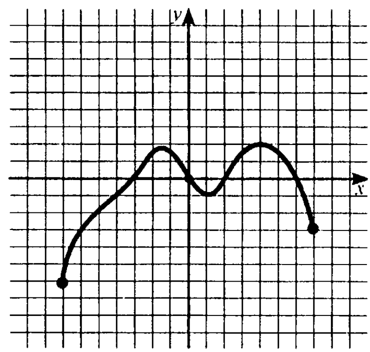
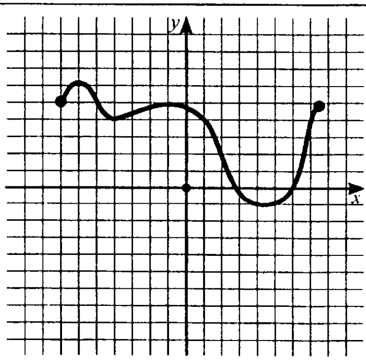
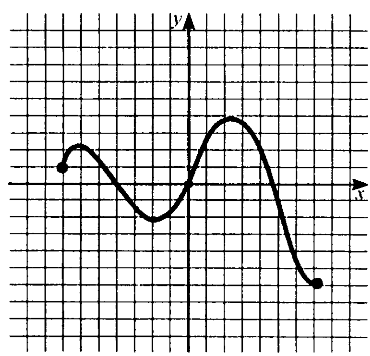
Задание № 50. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите количество точек экстремумов функции $y = f(x)$.

1		4	
2		5	
3		6	

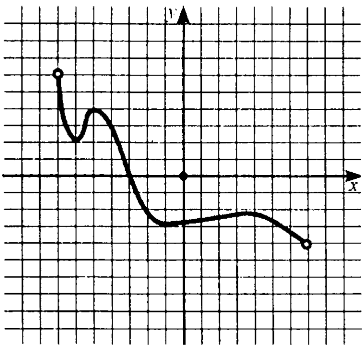
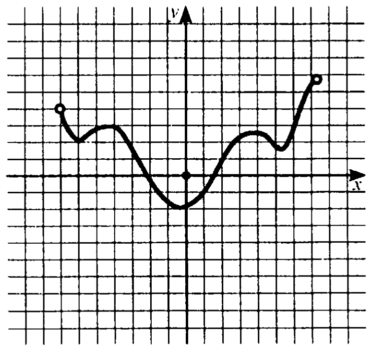
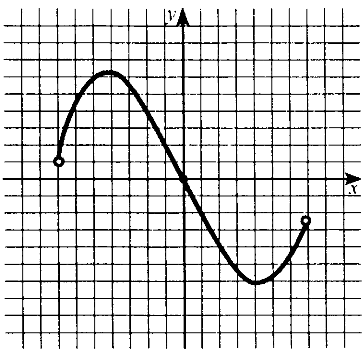
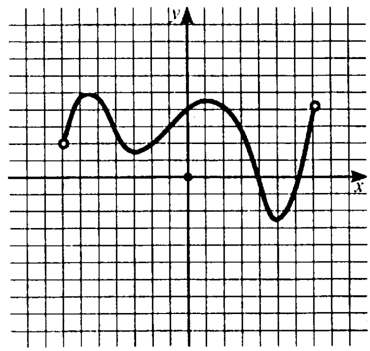
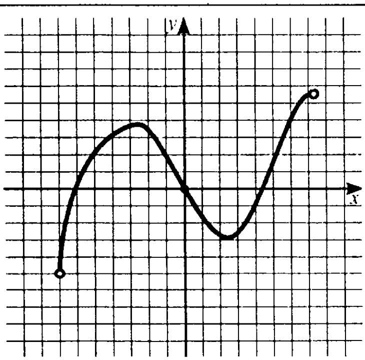
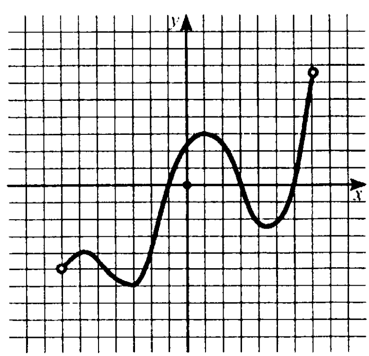
Задание № 51. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите координаты абсцисс точек, в которых функция $y = f(x)$ имеет точки максимум.

1		4	
2		5	
3		6	

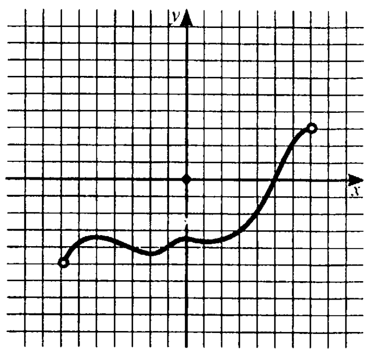
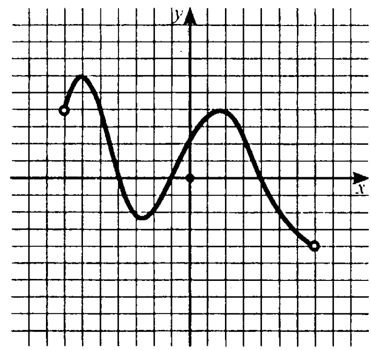
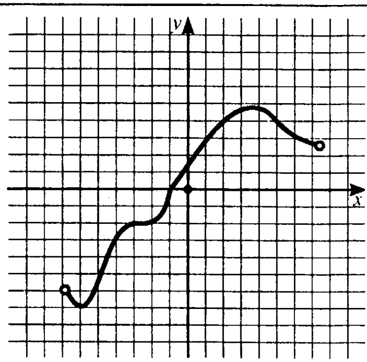
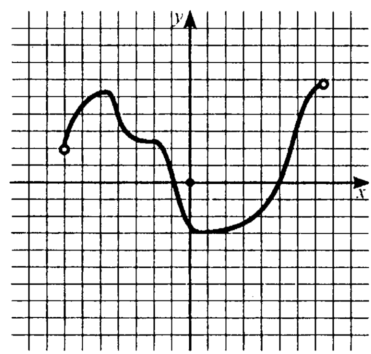
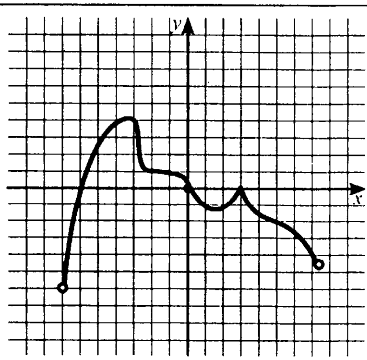
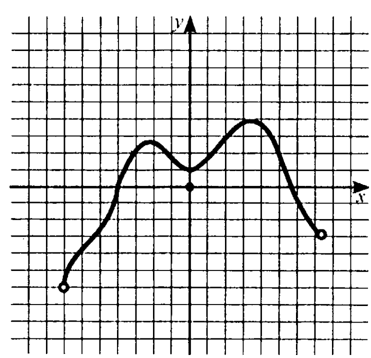
Задание № 52. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите координаты абсцисс точек, в которых функция $y = f(x)$ имеет точки минимум.

1		4	
2		5	
3		6	

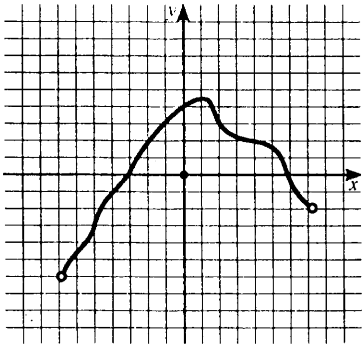
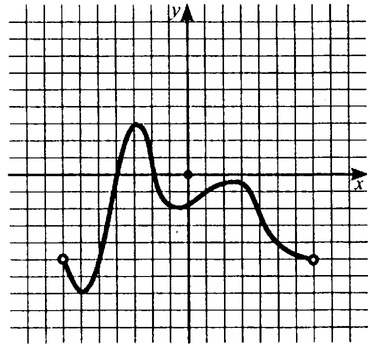
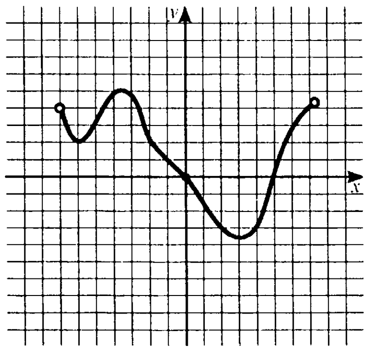
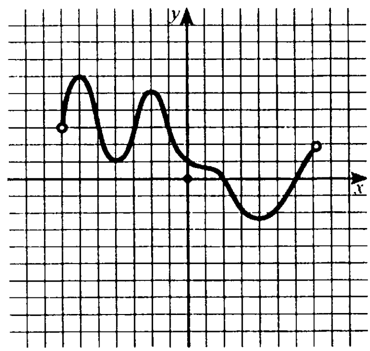
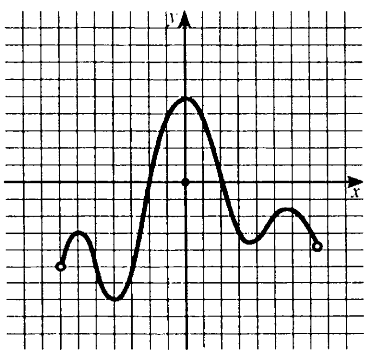
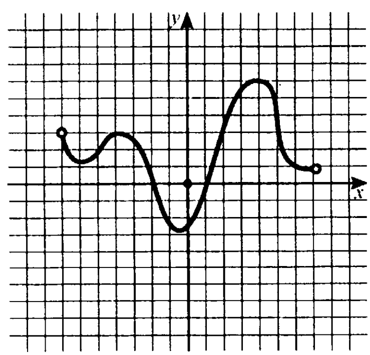
Задание № 53. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите абсциссу точки, в которой функция принимает наибольшее значение.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 54. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите абсциссу точки, в которой функция принимает наименьшее значение.

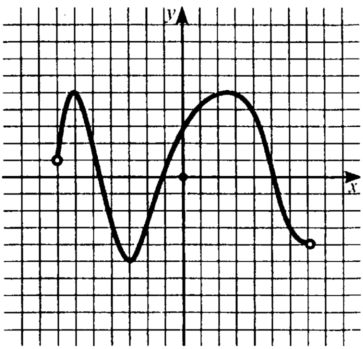
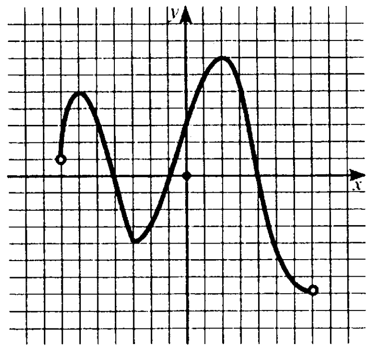
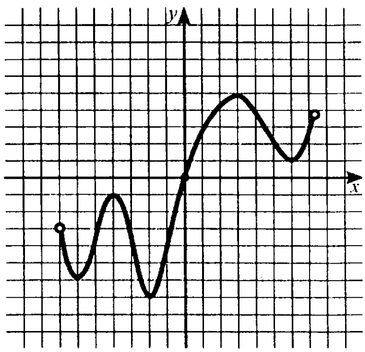
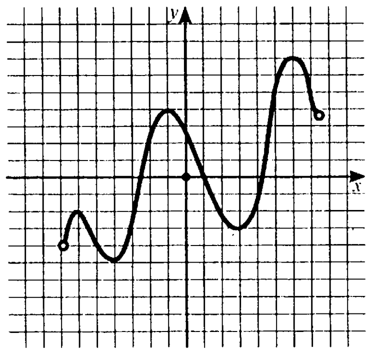
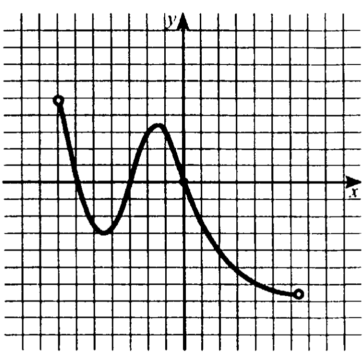
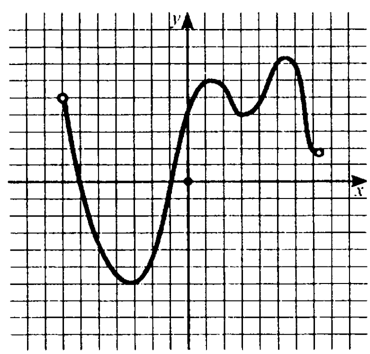
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 55. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите сумму абсцисс координат точек, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

1		4	
2		5	
3		6	

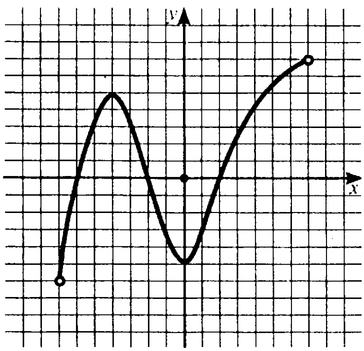
IV. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ

Задание № 56. По графику первообразной функции $y = F(x)$ определите количество точек, в которых функция $y = f(x)$ равна нулю.

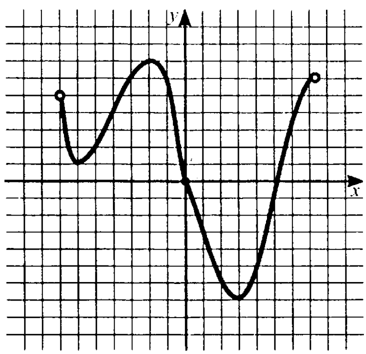
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 57. По графику первообразной функции $y=F(x)$ определите количество точек с целыми значениями абсцисс, в которых функция $y=f(x)$ положительна.

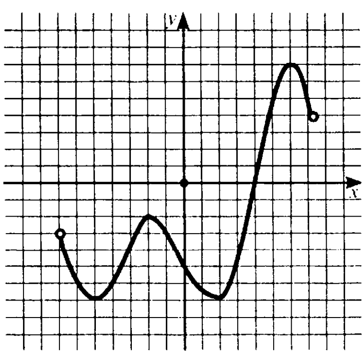
1



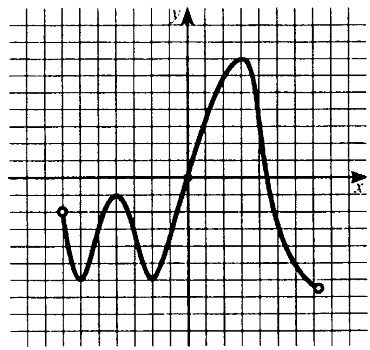
2



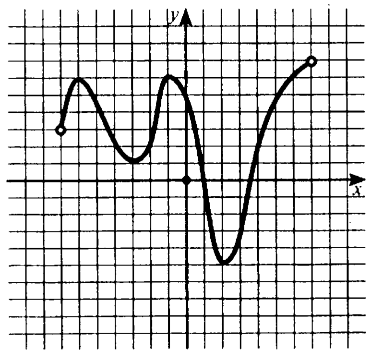
3



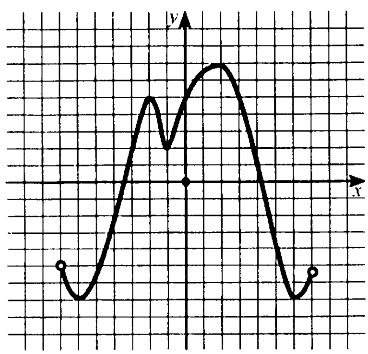
4



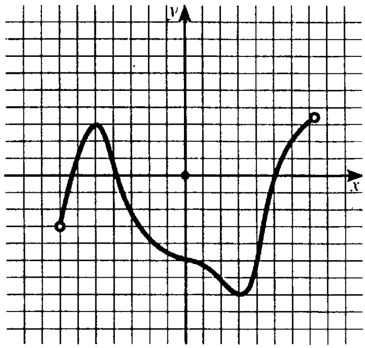
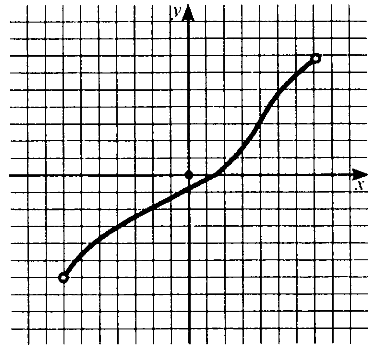
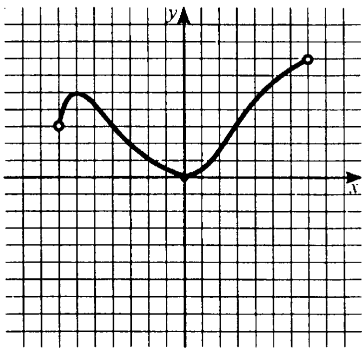
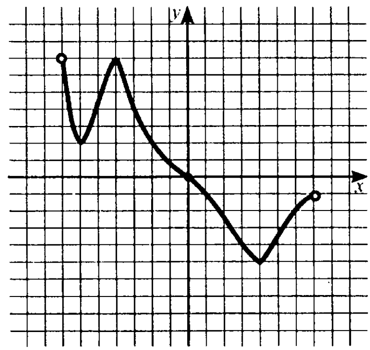
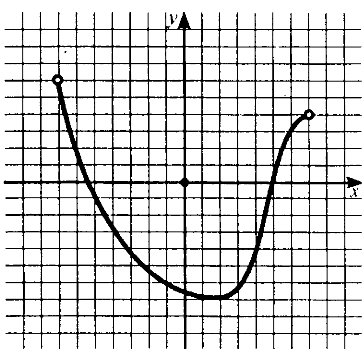
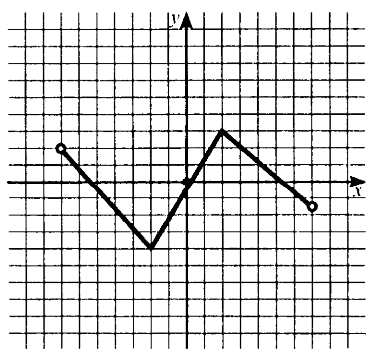
5



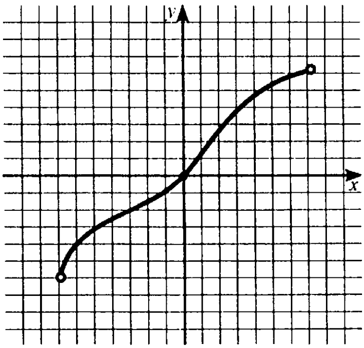
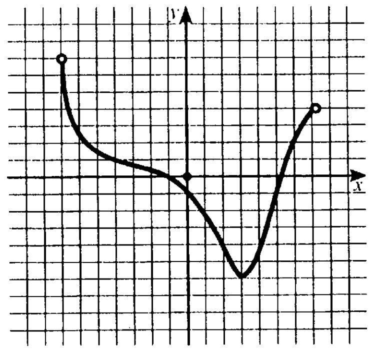
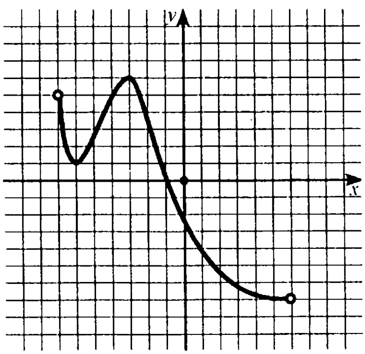
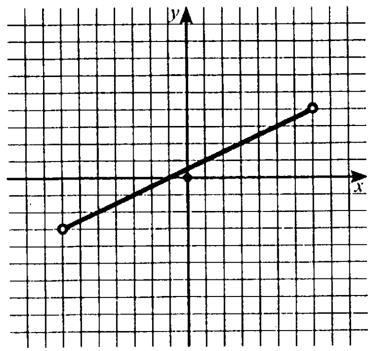
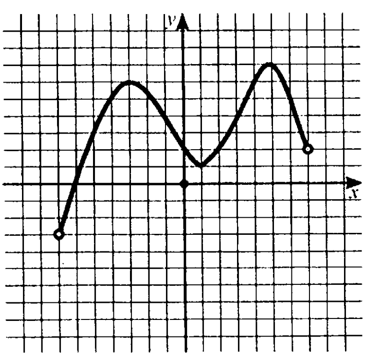
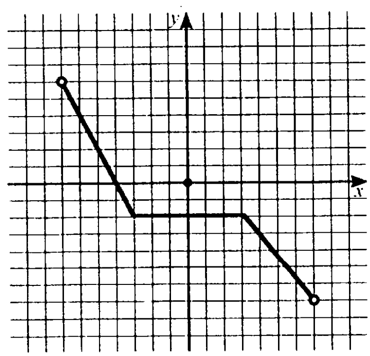
6



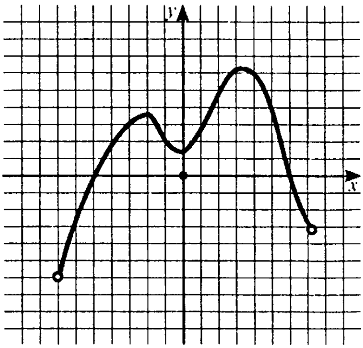
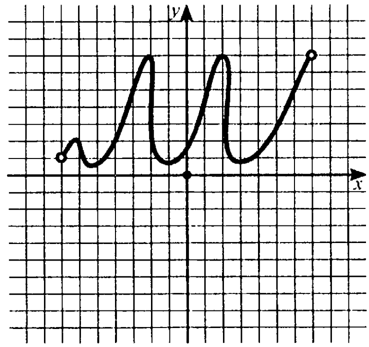
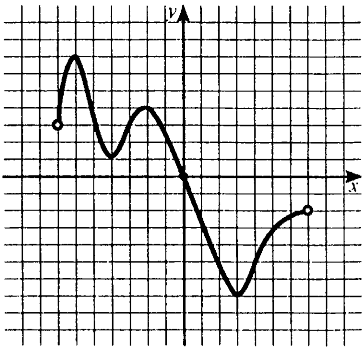
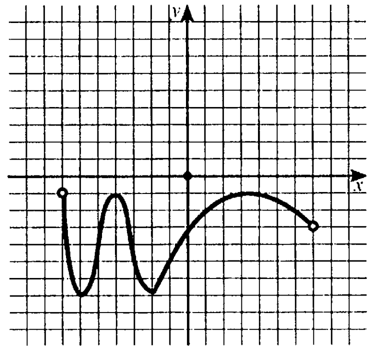
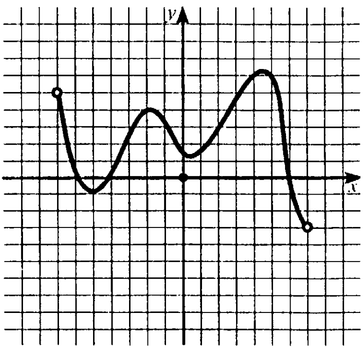
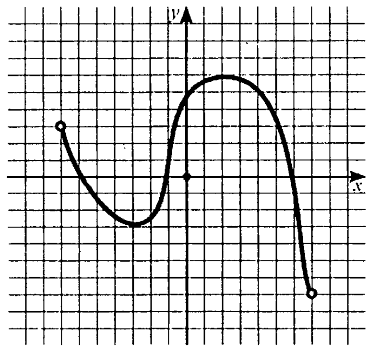
Задание № 58. По графику первообразной функции $y = F(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция $y = f(x)$ имеет отрицательный знак.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 59. По графику первообразной функции $y = F(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция $y = f(x)$ имеет положительный знак.

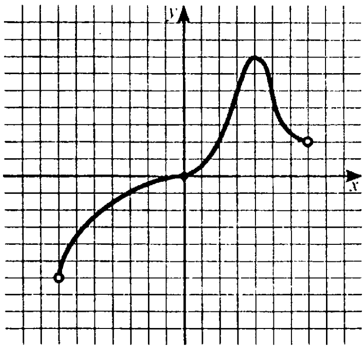
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 60. По графику функции $y = f(x)$ определите числовые промежутки, на которых первообразная функции $y = F(x)$ возрастает.

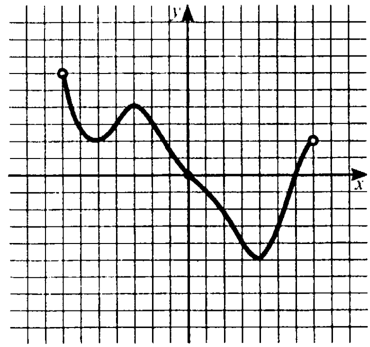
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 61. По графику функции $y = f(x)$ определите числовые промежутки, на которых первообразная функции $y = F(x)$ убывает.

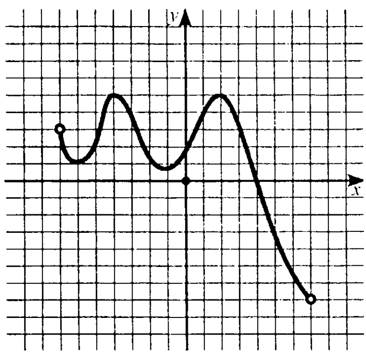
1



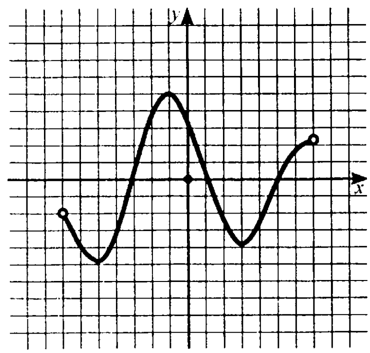
4



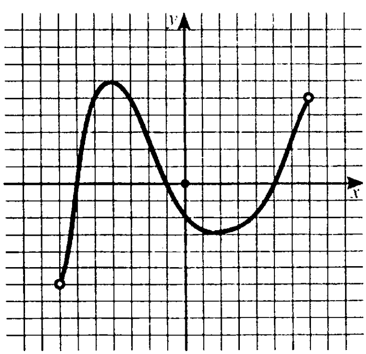
2



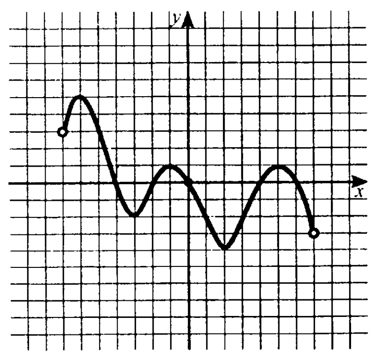
5



3

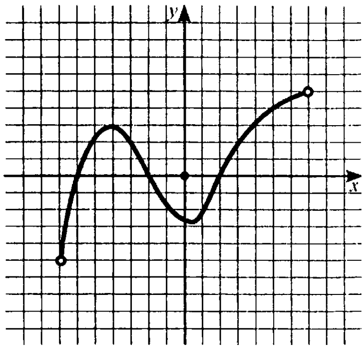


6

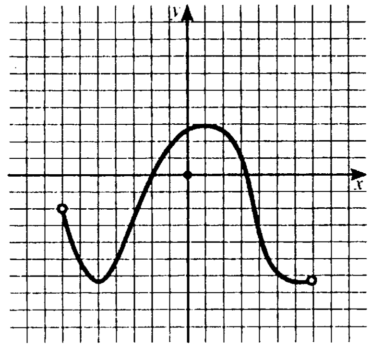


Задание № 62. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек экстремумов первообразной функции $y = F(x)$.

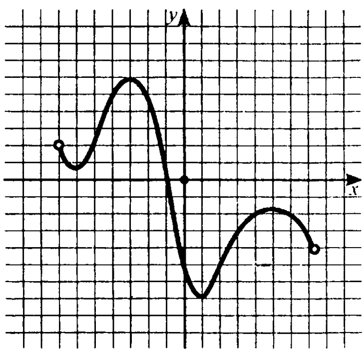
1



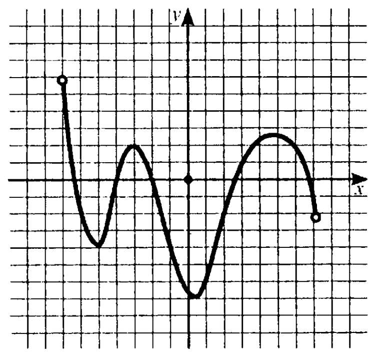
4



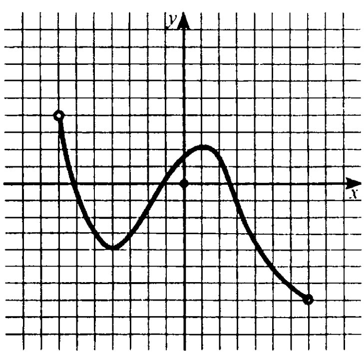
2



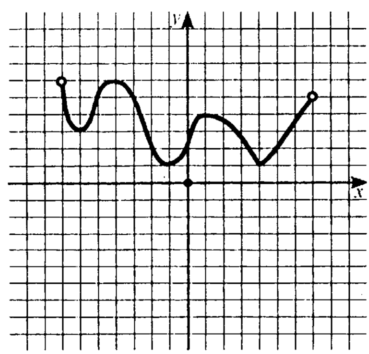
5



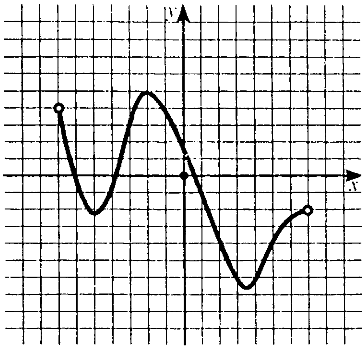
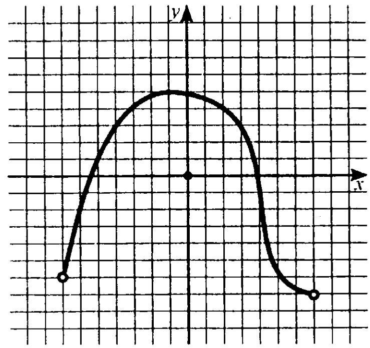
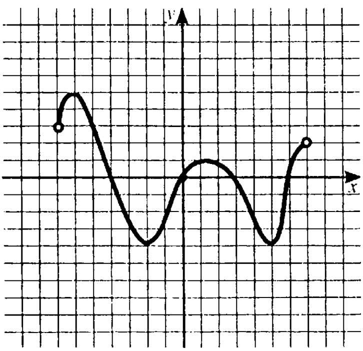
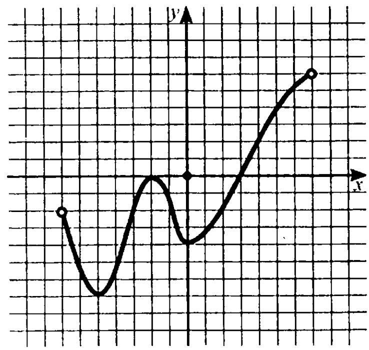
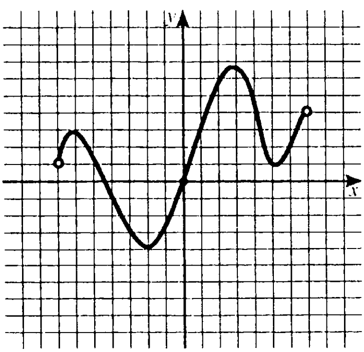
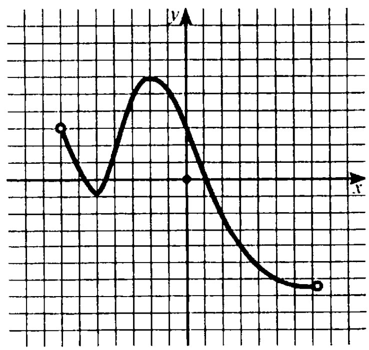
3



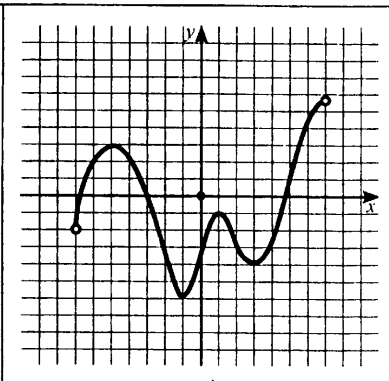
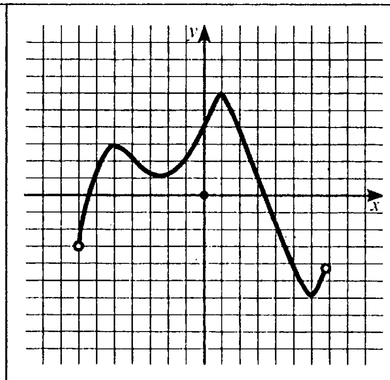
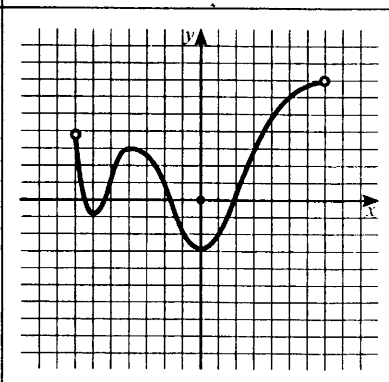
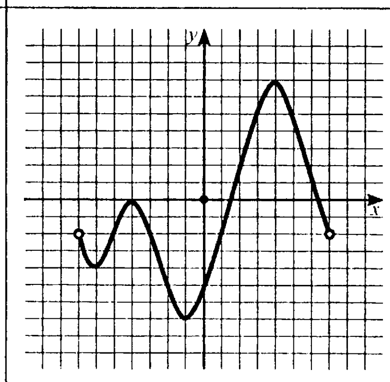
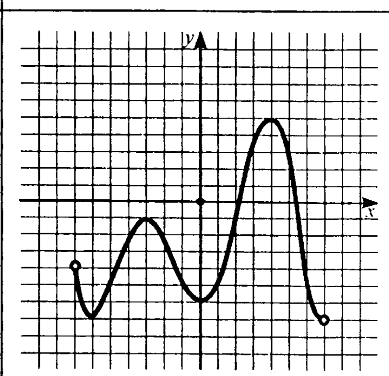
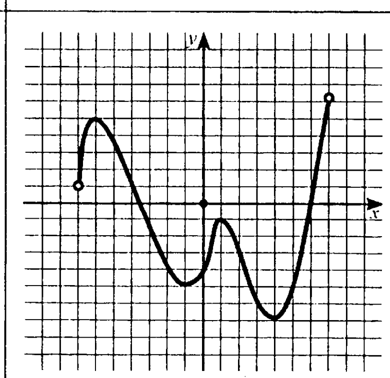
6



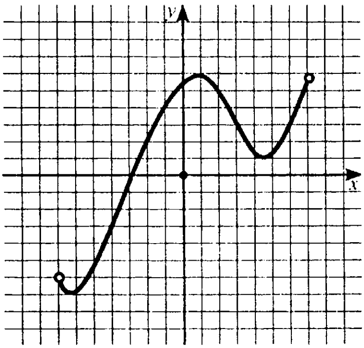
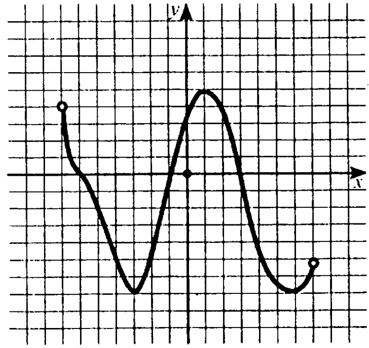
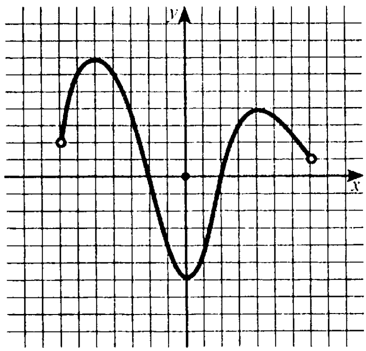
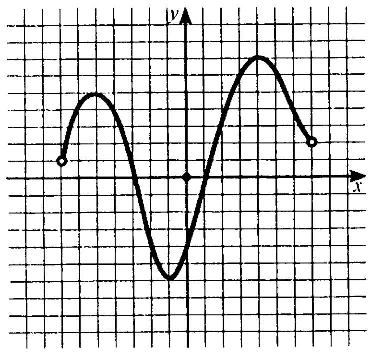
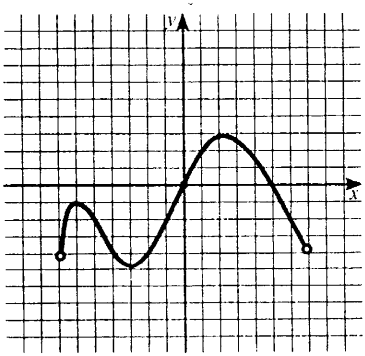
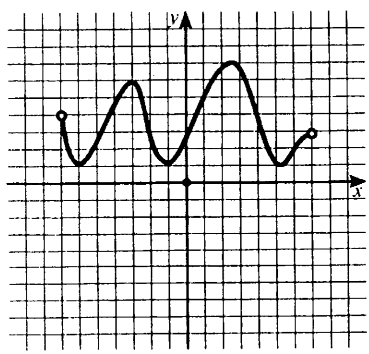
Задание № 63. По графику функции $y = f(x)$ определите количество точек, в которых коэффициент касательной, проведенной к графику первообразной функции $y = F(x)$, равен a.

1	 $a = 2$	4	 $a = \sqrt{2}$
2	 $a = 0$	5	 $a = 6$
3	 $a = -4$	6	 $a = \pi$

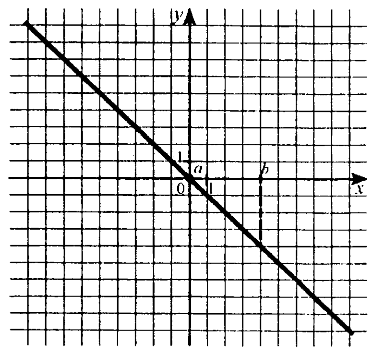
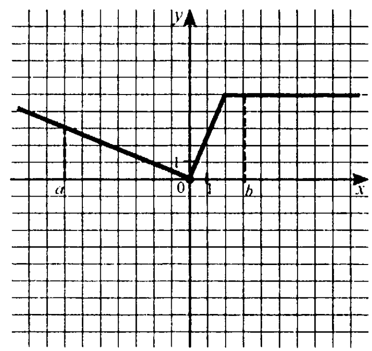
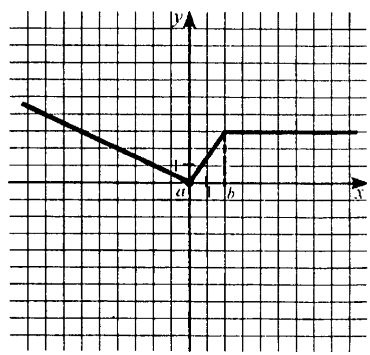
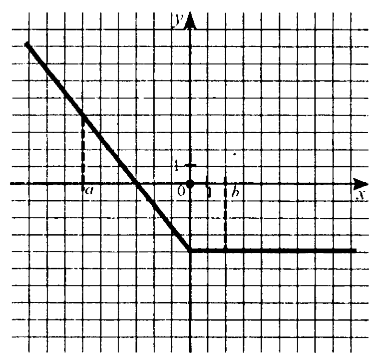
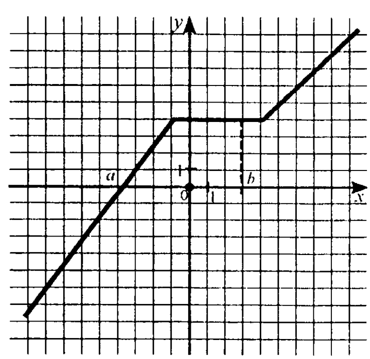
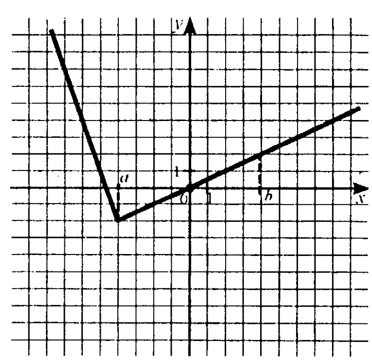
Задание № 64. По графику функции $y = f(x)$ определите точку, в которой касательная к графику первообразной функции $y = F(x)$ имеет наименьший угловой коэффициент.

1		4	
2		5	
3		6	

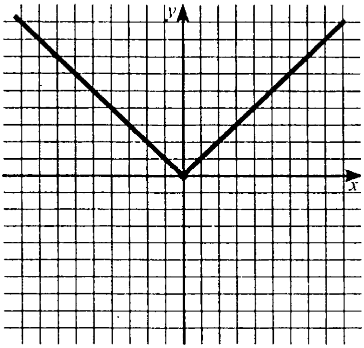
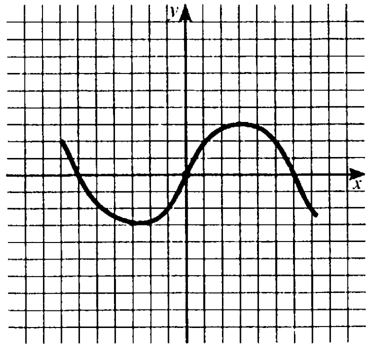
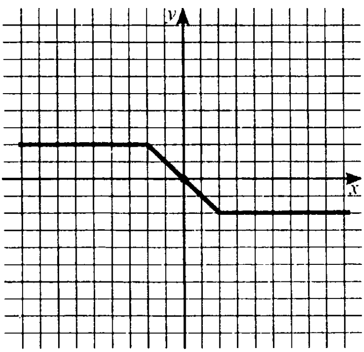
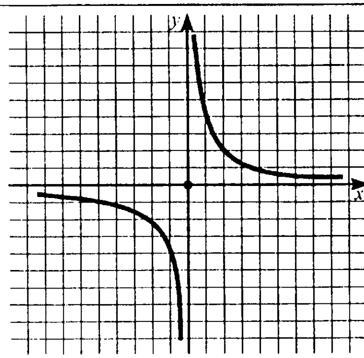
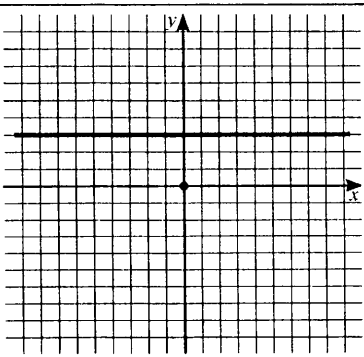
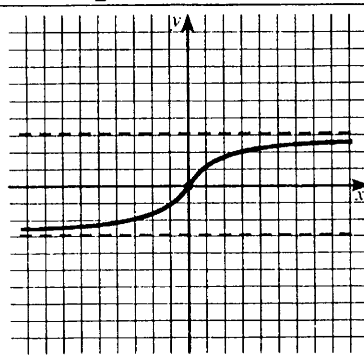
Задание № 65. По графику функции $y = f(x)$ определите, в каких точках график первообразной функции $y = F(x)$ имеет касательные, параллельные оси абсцисс.

1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 66. Вычислите $\int_a^b f(x)dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.

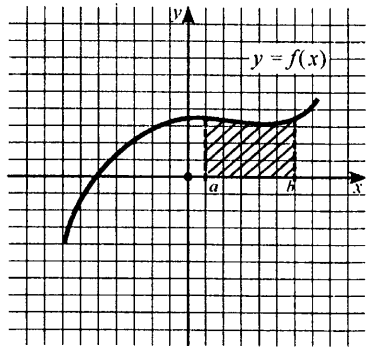
<table>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>4</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>5</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>6</td><td>
</td></tr>
</table>

Задание № 67. Вычислите, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.

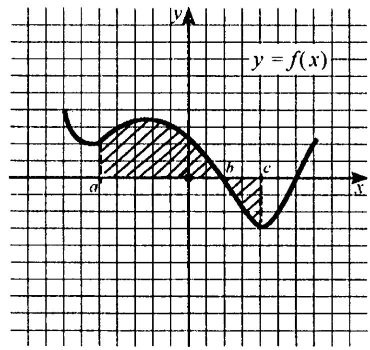
1	 $a = 4$	4	 $a = 2\pi$
2	 $a = 2$	5	 $a = \frac{1}{2}$
3	 $a = 3$	6	 $a = \pi$

Задание № 68. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.

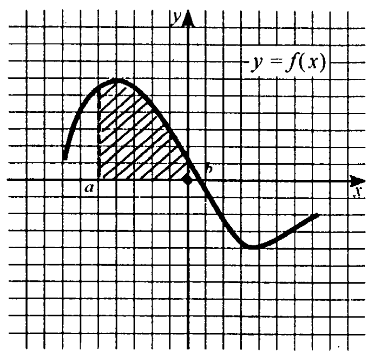
1



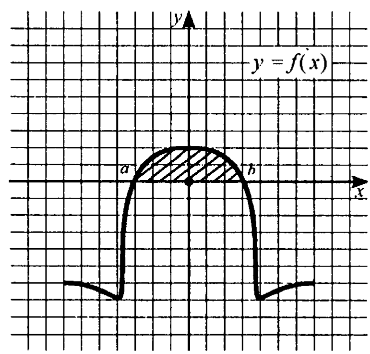
4



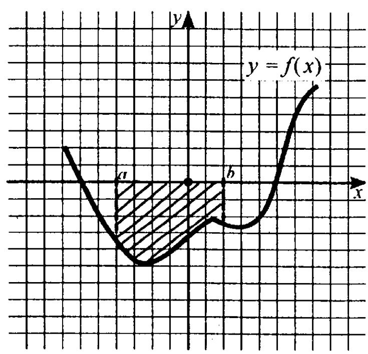
2



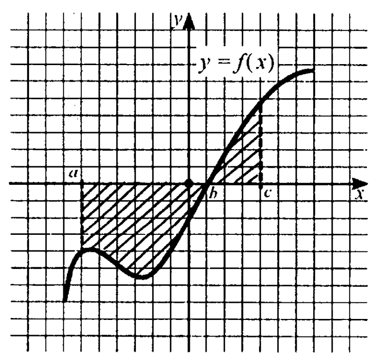
5



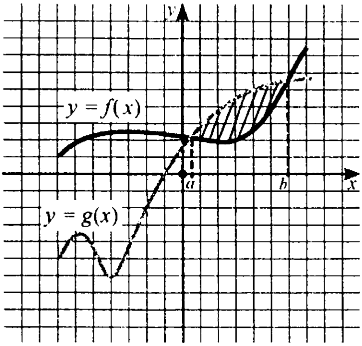
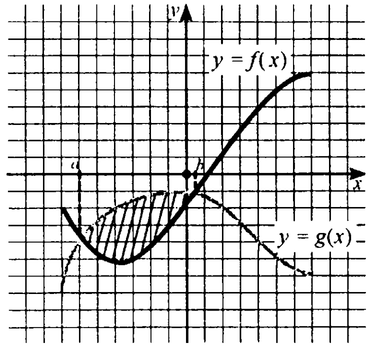
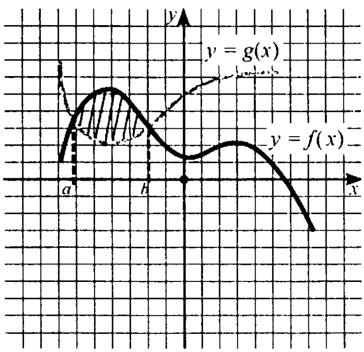
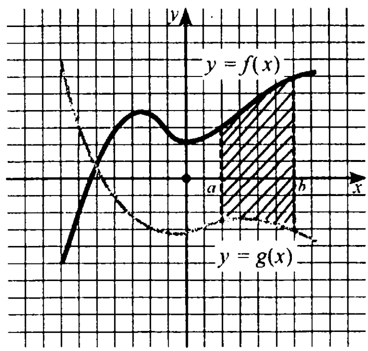
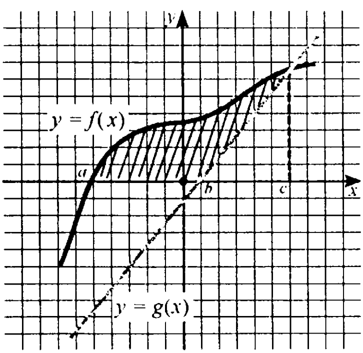
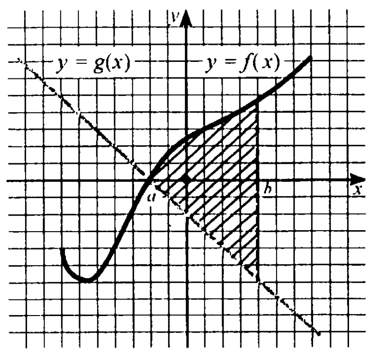
3



6

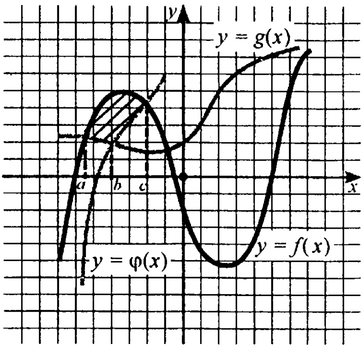


Задание № 69. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.

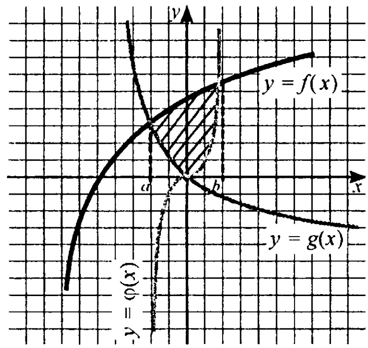
1		4	
2		5	
3		6	

Задание № 70. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.

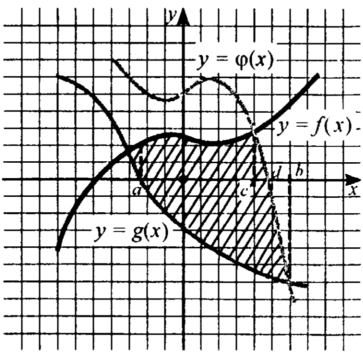
1



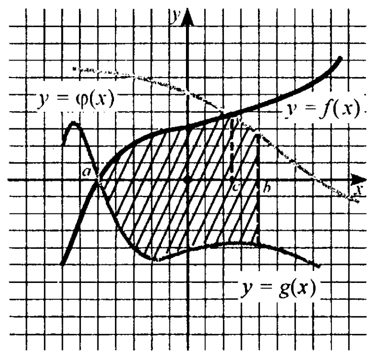
4



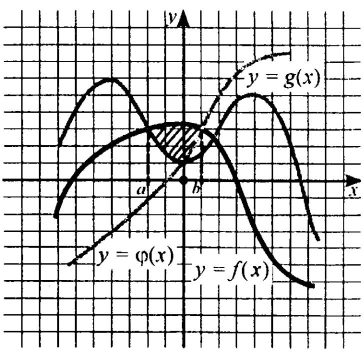
2



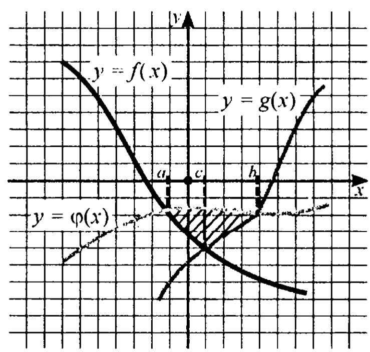
5



3



6



ОТВЕТЫ

№ задания	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
1	Да	Нет	Нет	Да	Нет	Да
2	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да
3	–4	0	Не существует	1	2	4
4	–6; –2	–6; 0; 5	–2	–5; 5	–2	Не существует
5	[7; 7)	[–7; –3) ∪ (–3; 7]	(–∞; 4) ∪ (4; +∞)	(–∞; +∞)	(–∞; –3) ∪ (–3; 3) ∪ (3; +∞)	[–7; 2) ∪ (2; 7)
6	Нет	Да	Да	Нет	Нет	Да
7	[–7; 3)	[–7; 6]	(–∞; +∞)	(–∞; 2) ∪ (2; +∞)	(–4; 4)	[–5; 3] ∪ {6}
8	Да	Да	Нет	Да	Нет	Нет
9	Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да
10	Нет	Да	Нет	Да	Да	Нет
11	Да	Нет	Да	Нет	Да	Да
12	3	–1	0	4	Не существует	2
13	7	–1	5	–1	5	–3
14	Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да
15	4	3	8	3	Не существует	6
16	–6	6	3	0	–2	Не существует
17	–6	–2; 4	0	Не существует	–4; 0; 2	0
18	–5; –2	6	Не существует	–4; 0	Не существует	–2; 4
19	5	0	–4	–1	Не существует	2
20	–3	–6; –1	–3	–7; –3; 0	Решений нет	–2; 7
21	[–7; –2)	[–7; 7]	(–6; 5]	(–6; –4) ∪ (0; 3)	Ø	(–7; –6) ∪ (–2; 4)
22	(–7; 0)	[–7; –2) ∪ (3; 7]	[–7; –5) ∪ (–2; 3)	(–4; 7]	(–7; –3) ∪ (–1; 3) ∪ (5; 7]	Ø
23	Да	Да	Нет	Да	Нет	Да
24	Да	Нет	Нет	Нет	Да	Нет

1	2	3	4	5	6	7
25	2	1	0	2	1	3
26	2	2	1	1	0	3
27	3	0	3	6	2	1
28	–6	–3	0	6	–2	–5
29	4	7	5	4	–1	6
30	–2	–4	0	–7	–4	–6
31	2	1	2	0	–1	1
32	0	7	–1	–7	0	7
33	–2	4	Не существует	4	5	$+\infty$
34	$-\infty$	–3	$+\infty$	Не существует	$+\infty$	0
35	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	–2	$-\infty$	$+\infty$
36	–1	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	–0,7	0
37	2	0,3	–3,5	0	Не существует	0
38	3	2	0	–2	6	0
39	1	3	0	3	2	3
40	–1	3	–5	0	–3	6
41	2	–2,5; 3	–2; –4	3	–6; 5	6
42	5	–2	–3; 0	–6; –2; 2	–5; –1	Не существует
43	3	1	0	1	2	3
44	3	2	7	0	3	1
45	$(-7; -3)$	$(1; 7)$	$(-6; 7)$	$(-5; 1) \cup (3; 7)$	$(0; 2)$	$(-7; -5) \cup (-2; 2)$
46	$(-3; 1)$	$[-7; -5)$	$[-7; -5) \cup (2; 5)$	$(-6; -5) \cup (-3; 1) \cup (2; 7]$	$(1; 5)$	$(-6; -2) \cup (0; 7]$
47	$(-4; 6)$	$(-7; 4)$	$(-4; 1) \cup (5; 7)$	$(-7; 2)$	$(-6; 3) \cup (6; 7)$	$(-5; 2) \cup (4; 7)$
48	$(4; 6)$	$(-7; 6)$	$(-1; 2)$	$(-3; 0) \cup (3; 7)$	$(-7; -6) \cup (-3; 3) \cup (6; 7)$	$(0; 4)$
49	2	1	3	4	2	0
50	2	3	0	1	3	4
51	–3	–3; 4	–5; 6	6	0	Не существует
52	–2	4	6	–6	–3; 2	0
53	–3	0	0	–2	4	3

Окончание табл.

1	2	3	4	5	6	7
54	5	–1	–6	–1	5	–4
55	3	5	0	–6	8	–1
56	3	5	2	3	5	4
57	8	6	5	5	5	5
58	$(-5; 3)$	$(-6; 0)$	$(-7; 2)$	$\varnothing$	$(-7; -6) \cup (-4; 4)$	$(-7; -2) \cup (2; 7)$
59	$(-7; 7)$	$(-6; -3)$	$(-7; -3) \cup (1; 5)$	$(3; 7)$	$(-7; 7)$	$\varnothing$
60	$(-5; 6)$	$(-7; 0)$	$(-7; -6) \cup (-4; 6)$	$(-7; 7)$	$\varnothing$	$(-7; -6) \cup (-1; 6)$
61	$(-7; 0)$	$(4; 7)$	$(-7; -6) \cup (-1; 5)$	$(0; 6)$	$(-7; -3) \cup (1; 5)$	$(-4; -2) \cup (0; 4) \cup (6; 7)$
62	3	1	3	2	5	0
63	3	4	1	2	0	2
64	–1	0	–6	6	–1	4
65	–3	–2; 2	0; 5	–6; –1; 3	–3; 1	Не существует
66	–8	3	22	20,5	–8	0
67	16	0	18	0	0	0
68	$\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx$	$-\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$	$2\int_0^b f(x)\,dx$	$\int_b^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$
69	$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$	$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c g(x)\,dx$	$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
70	$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c \varphi(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$	$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^0 g(x)\,dx - \int_0^b \varphi(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^0 g(x)\,dx - \int_0^b \varphi(x)\,dx$	$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx$	$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_c^b g(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

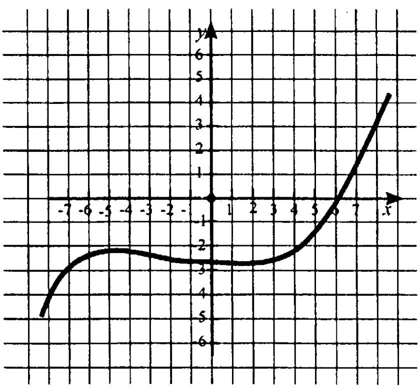
Функция и ее свойства.

В различной литературе можно встретить разные определения понятия функции, приведем в качестве примера два следующих определения:

1) Функция – это зависимость одной переменной величины от другой.

2) Функция – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Именно второе определение позволяет наглядно найти среди кривых ту, которая задается функцией. Достаточно найти такое значение на оси абсцисс, для которого будут существовать более одного значения по оси ординат, для того чтобы сказать, что график кривой не является графиком функции.



Пример № 1.

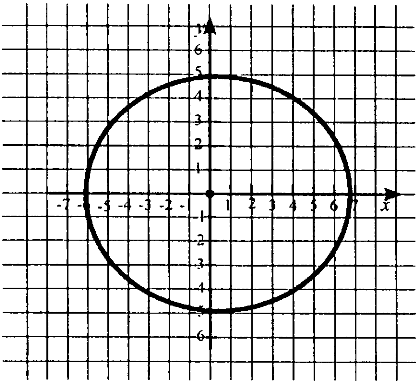
Является ли изображенный график графиком функции?

Решение:

На данном чертеже видим, что любому значению по оси абсцисс соответствует ровно одно значение по оси ординат, следовательно, изображенный график является графиком функции.

Ответ: да, является графиком функции.

Пример № 2. Является ли изображенный график графиком функции? (См. с. 78.)



Решение:

На данном чертеже видим, что на оси абсцисс имеются такие значения, которым соответствует более одного значения по оси ординат (к примеру, при $x=0$: $y\approx 5$ и $y\approx -4{,}9$), следовательно, данный график не является графиком функции.

Ответ: нет, не является графиком функции.

К свойствам функции относятся:

1) Область определения функции – это множество $D(f)$, которое образуют все допустимые значения аргумента функции $y=f(x)$.

Если необходимо найти по графику функции ее область определения, то достаточно посмотреть на ось абсцисс и перечислить все те значения, для которых найдется точка функции. Если для какой-то точки не было найдено значение на функции, то эта точка удаляется из всего множества. В конечном итоге полученное множество будет являться областью определения функции.

2) Область значений функции – это множество $E(f)$, которое образуют все значения, которые принимает функция $y=f(x)$.

Область значений по графику можно определить при помощи оси ординат. Необходимо выбрать все те значения на данной оси, для которых найдется хотя бы одно значение функции. Все такие точки и будут формировать искомое множество.

3) Четность функции. По данному признаку можно провести классификацию понятия функции.

Функция
(по четности)

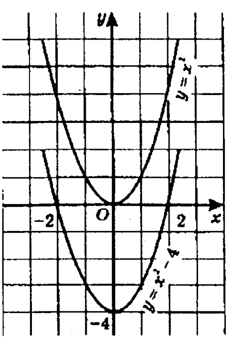
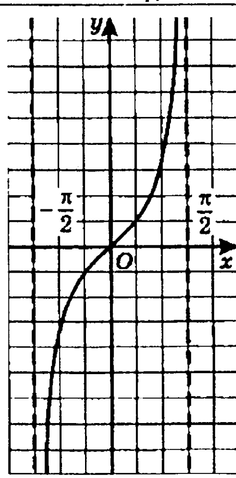
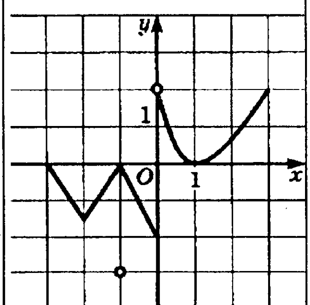
четная	*нечетная*	*общего вида*
$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$	

Если стоит вопрос об определении четности функции по ее графику, то необходимо помнить, если функция рассматривается не на симметричном числовом промежутке, то заведомо функция является общего вида, если числовой промежуток симметричен, то определяем симметрию функции:

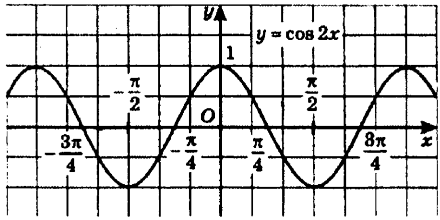
– симметрия относительно оси ординат – функция четная;

– симметрия относительно начала координат – функция нечетная;

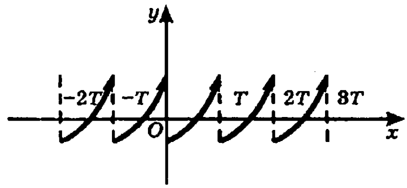
– симметрии нет – функция общего вида.

четная функция	*нечетная функция*	*функция общего вида*
		

4) Периодичность. Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое отличное от нуля число T, называемое периодом функции, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.



Периодические функции в своих графиках имеют особенность повторения определенного участка бесконечное количество раз.



Наименьший отрезок, который повторяется у периодических функций, называется основным периодом.

С периодическими функциями впервые можно познакомиться в старших классах – тригонометрические функции. Так для синусоиды $y=\sin x$ основной период равен $T=2\pi$.

5) Точки пересечения с осями координат. Это те точки, в которых выполняется равенство $f(x)=0$ (по графику функции – точки пересечения с осью абсцисс) и значение функции при $x=0$ (по графику – точка пересечения с осью ординат).

6) Возрастание и убывание:

– функция $y=f(x)$ – возрастающая на промежутке, если для любых двух аргументов x_1 и x_2 из данного промежутка выполняется $f(x_1)<f(x_2)$ при условии, что $x_1<x_2$;

– функция $y=f(x)$ – убывающая на промежутке, если для любых двух аргументов x_1 и x_2 из данного промежутка выполняется $f(x_1)>f(x_2)$ при условии, что $x_1<x_2$.

По графику функции на некотором промежутке данное свойство проявляется следующим образом: чем больше аргумент, тем больше значение функции, то она возрастает на данном промежутке, иначе – убывает.

7) Экстремумы – совокупность всех точек максимумов (в данных точках функция меняется с возрастания на убывание) и минимумов (функция меняется с убывания на возрастание).

8) Наибольшее и наименьшее значение функции. При нахождении данных значений необходимо работать с осью ординат, выбрав соответственно самое наибольшее и наименьшее значение в области значений функции.

Следует не забывать, что не всегда наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке будут совпадать с каким-нибудь значением из множества экстремумов.

Предел функции.

Теперь введем определение предела функции. У данного понятия также имеется несколько равнозначных определений (к примеру, определения пределов функций по Коши и по Гейне), но нас интересует именно значение предела функции на определенном числовом промежутке по ее графику.

Таким образом, под пределом функции будем понимать значение данной функции при заданном значении аргумента.

Пример № 3. Определите значения пределов функции:

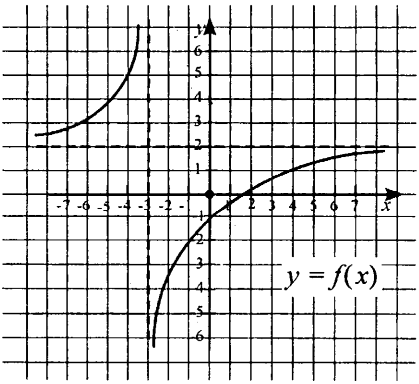
1) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$;

5) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

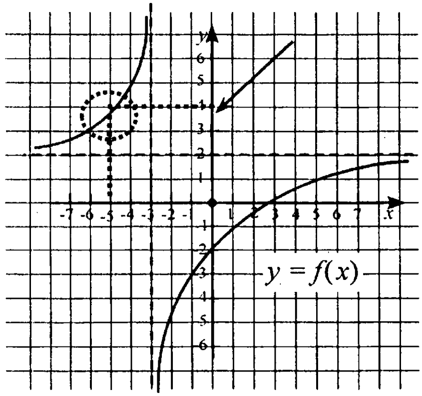


Решение:

Для каждого случая рассмотрим данный график.

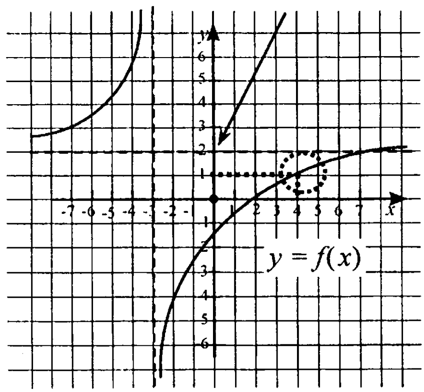
1) Необходимо найти значение функции в точке $x = -5$, для этого выделим данную точку на функции и определим, какое значение на оси ординат соответствует при $x = -5$.

Ответ: $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 4$.



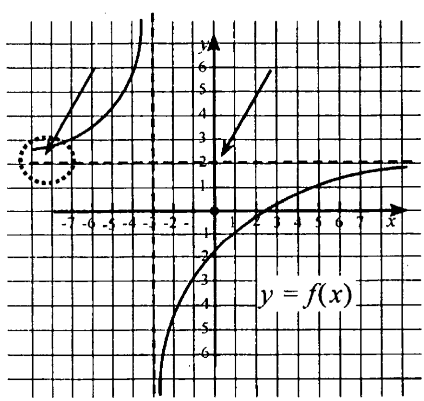
2) В данном случае рассуждения аналогичны, как и в первом пункте. Отметим на чертеже необходимую точку и найдем ее значение по оси ординат.

Ответ: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$.

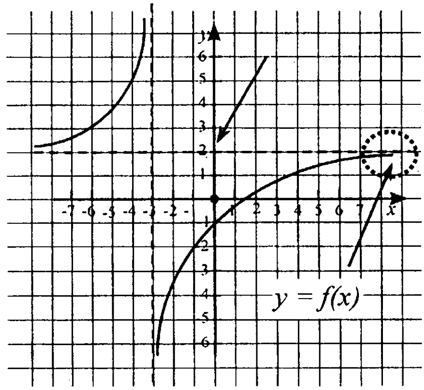


3) В данном примере переменная стремится к минус бесконечности, то есть необходимо по графику определить значение, к которому функция стремится – это горизонтальная асимптота $y = 2$. Чем дальше в минус бесконечность стремится аргумент, тем ближе функция к данной асимптоте.

Ответ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

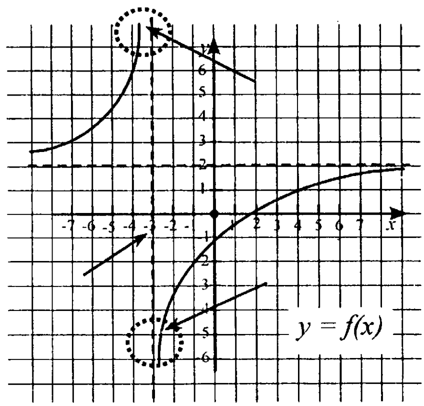


4) Переменная стремится к плюс бесконечности, следовательно, рассуждения такие же, что и в пункте 3. Здесь также используется горизонтальная асимптота $y=2$.



Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

5) В данном примере аргумент стремится к тому значению, которое является асимптотой $x=-3$. По графику видно, что при данном значении функция не существует, и если рассматривать относительно данной вертикальной асимптоты значения пределов функции, то слева значение стремится к плюс бесконечности, а справа к минус бесконечности.

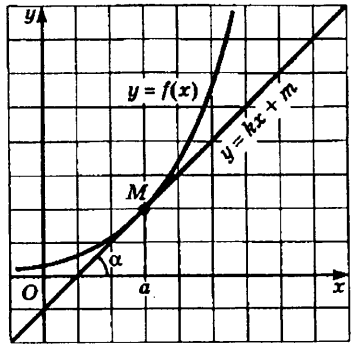


Ответ: предел в данной точке не существует.

Производная функции.

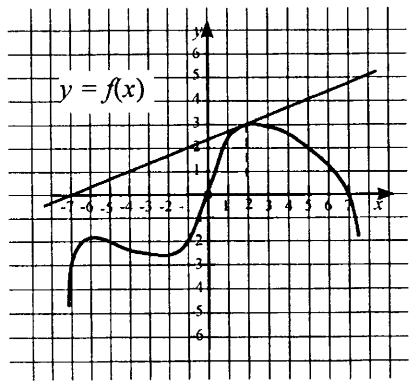
Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x и в некоторой ее окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел отношения при $\Delta x\to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$



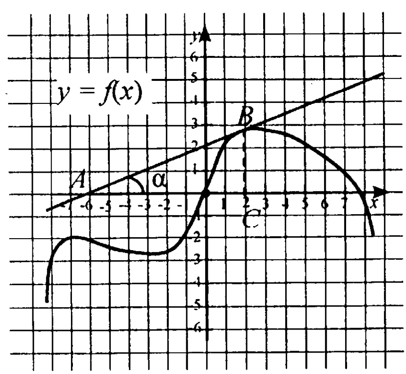
Геометрический смысл производной: если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, не параллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a).$$



Пример № 4. Определите значение производной функции в точке $x = 2$.

Решение: Так как решением задачи является определение тангенса угла наклона к положительной части оси абсцисс, то необходимо найти прямоугольный треугольник с искомым углом. Один из таких треугольников имеет вершины с координатами $A(-7; 0)$, $B(2; 3)$ и $C(2; 0)$ тогда все свелось к нахождению тангенса угла α. Значение производной функции в заданной точке будет положительным, так как

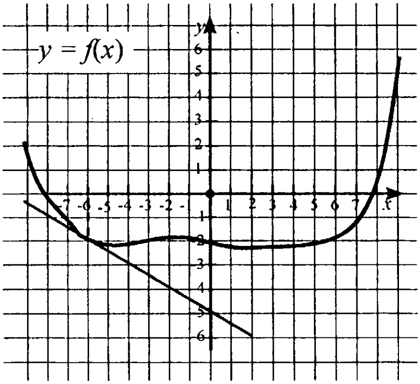


касательная образует острый угол относительно положительной части оси абсцисс (касательная возрастает).

$$f'(2) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

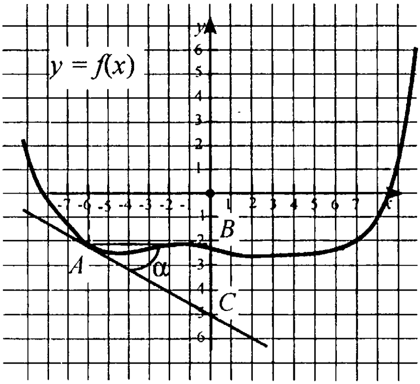
Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример № 5. Определите значение производной функции в точке $x = -6$.



Решение:

В данном примере видим, что касательная убывает, то есть образует тупой угол с положительной частью оси абсцисс. Аналогично, как и в предыдущем примере, необходимо найти треугольник, в котором найдем тангенс угла, но только со знаком минус. Рассмотрим треугольник с вершинами $A(-6; -2)$, $B(0; -2)$ и $C(0; -5)$.



$$f'(-6) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{BC}{AC} = -\frac{3}{6} = -0{,}5.$$

Ответ: $-0{,}5$.

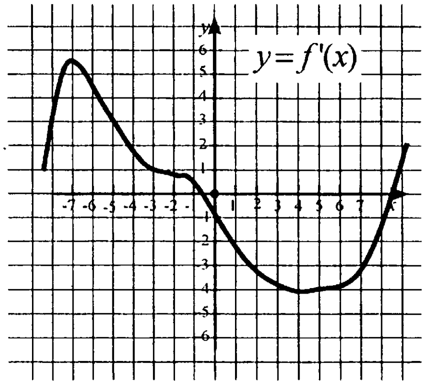
Пример № 6. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точках:

1) $x = 1$;

2) $x = -3$.

Решение:

Данное задание отличается от других тем, что здесь уже дан график производной функции, а не самой функции. Таким образом, ось ординат показывает значения производной функции, то есть:



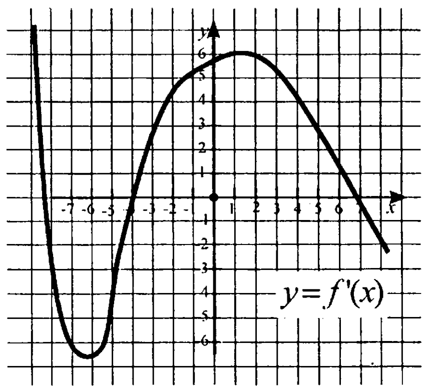
1) При $x=1$: $y=-2$.

Ответ: -2.

2) При $x=-3$: $y=1$.

Ответ: 1.

Пример № 7. По графику производной функции $y=f'(x)$ определите, в скольких точках график функции имеет касательные, проведенные под углом α относительно положительной части оси абсцисс:

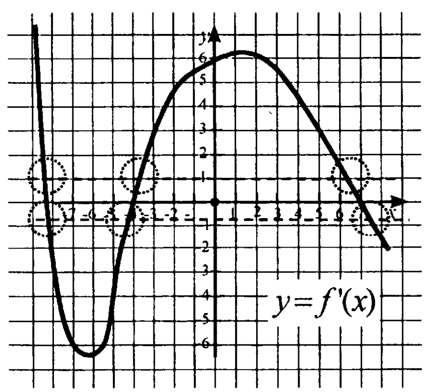


1) $\alpha = 30°$;

2) $\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$.

Решение:

Так как геометрическим смыслом производной функции в точке является тангенс угла наклона касательной относительно положительной части оси абсцисс, то задача сводится к нахождению тангенса задан-



ного угла, а потом в подсчете количества точек функции, в которых данные значения совпадают с их второй координатой.

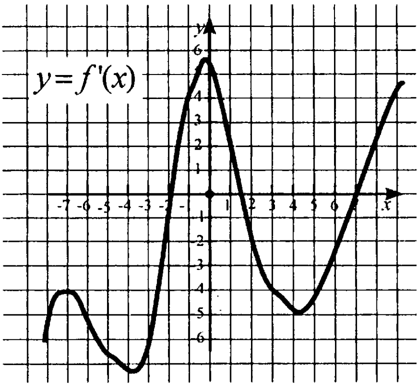
1) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$. Теперь по графику находим, в скольких точках ордината совпадает с этим значением.

Ответ: 3.

2) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Аналогично находим, в скольких точках ордината совпадает с этим значением.

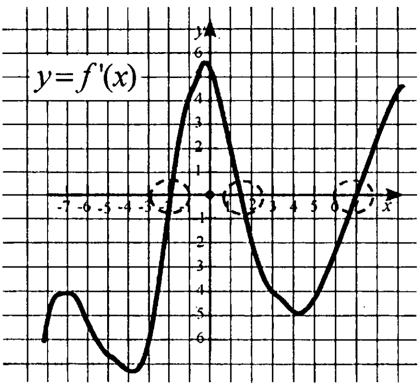
Ответ: 3.

Пример № 8. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите, в каких точках график функции имеет касательные, параллельные оси абсцисс.



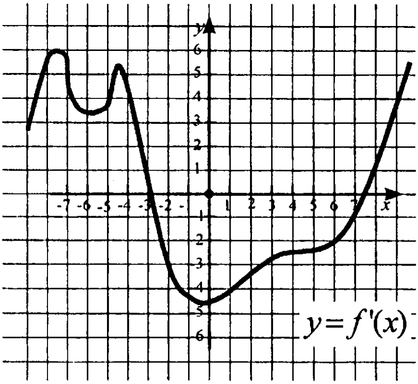
Решение:

Необходимо помнить, что в экстремумах функции касательная параллельна оси абсцисс и имеет аналитическую запись $y = \text{const}$, то есть угловой коэффициент равен нулю, таким образом, это задание сводится к нахождению абсцисс точек, в которых ординаты равны нулю.



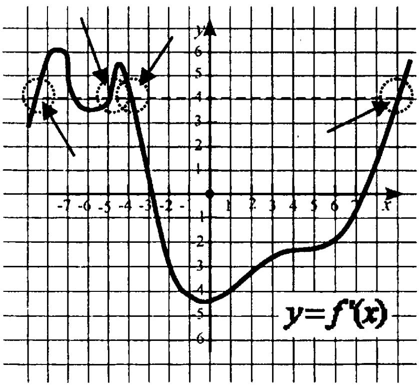
Ответ: –2; 1,5; 7.

Пример № 9. По графику производной функции $y=f'(x)$ определите количество касательных, проведенных к графику функции, которые параллельны прямой $y=4x-10$ или совпадают с ней.



Решение:

Так как производная функции в точке совпадает с угловым коэффициентом касательной, то задача свелась к подсчету количества точек, у которых ордината совпадает с угловым коэффициентом данной касательной, то есть равна 4.



Ответ: 4.

Исследование функции с помощью производной.

Теорема № 1. Если во всех точках открытого промежутка выполняется неравенство $f'(x)\geq 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y=f(x)$ возрастает на данном промежутке.

Теорема № 2. Если во всех точках открытого промежутка выполняется неравенство $f'(x)\leq 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y=f(x)$ убывает на данном промежутке.

Теорема № 3. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю, либо не существует.

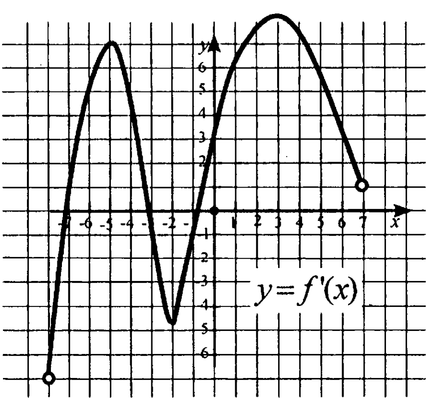
Теорема № 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке и имеет внутри промежутка точку $x = x_0$, в которой производная либо равна нулю, либо не существует, тогда если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$.

Теорема № 5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке и имеет внутри промежутка точку $x = x_0$, в которой производная либо равна нулю, либо не существует, тогда если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$.

Пример № 10. По графику функции $y = f(x)$ определите числовые промежутки, на которых производная функции имеет:

1) отрицательный знак;

2) положительный знак.



Решение:

1) Так как необходимо, чтобы производная функции имела отрицательный знак, следовательно, сама функция должна убы-

вать, поэтому по графику определяем числовые промежутки, на которых это выполняется.

Ответ: $x \in (-5; -2) \cup (3; 7)$.

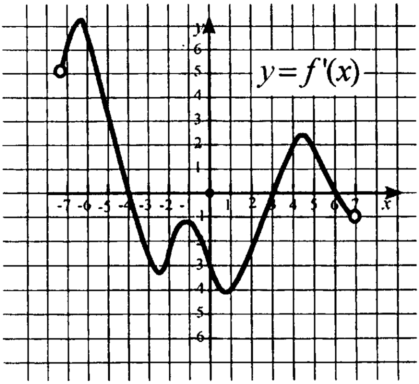
2) В этом пункте, наоборот, функция должна возрастать, чтобы производная функции имела положительный знак, поэтому по графику определяем числовые промежутки, на которых это выполняется.

Ответ: $x \in (-8; -5) \cup (-2; 3)$.

Пример № 11. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите числовые промежутки, на которых функция:

1) возрастает;

2) убывает.



Решение:

Данная задача сводится напрямую к использованию теорем № 1 и № 2.

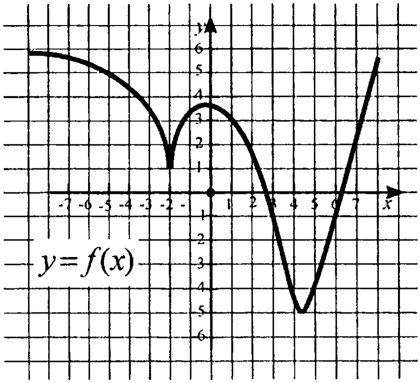
1) Находим числовые промежутки, на которых производная функции принимает положительные значения.

Ответ: $x \in (-7; -4) \cup (3; 6)$.

2) Находим числовые промежутки, на которых производная функции принимает отрицательные значения.

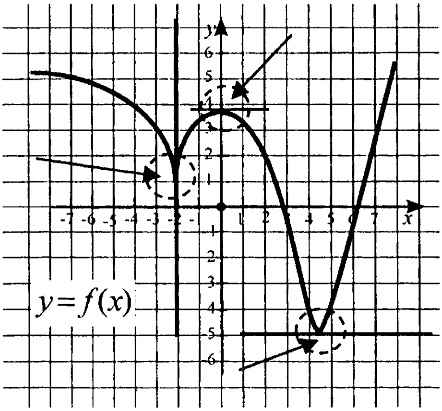
Ответ: $x \in (-4; 3) \cup (6; 7)$.

Пример № 12. По графику функции $y=f(x)$ определите количество точек, в которых производная функции равна нулю или не существует.



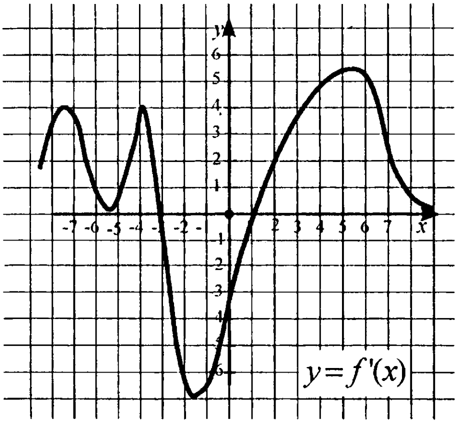
Решение:

Согласно теореме № 3, производная функции будет равна нулю в экстремумах (на графике в этих точках касательная будет параллельна оси абсцисс или оси ординат). Поэтому на графике проведем в таких точках касательные и подсчитаем, сколько их всего.



Ответ: 3.

Пример № 13. По графику производной функции $y=f'(x)$ определите количество точек экстремумов функции $y=f(x)$.

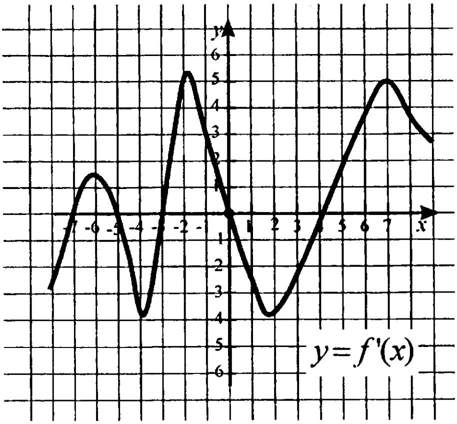


Решение:

Так как теперь дан график производной функции, то у функции экстремумы будут в тех точках, в которых производная равна нулю или не существует. В нашем примере нет точек, в которых производная не существует, следовательно, найдем точки, в которых она обнуляется. По графику производной функции видим, что она равна нулю при $x = -3$ и $x = 1$. В ответе указываем только количество полученных точек.

Ответ: 2.

Пример № 14. По графику производной функции $y = f'(x)$ определите координаты абсцисс точек, в которых функция $y = f(x)$ имеет:

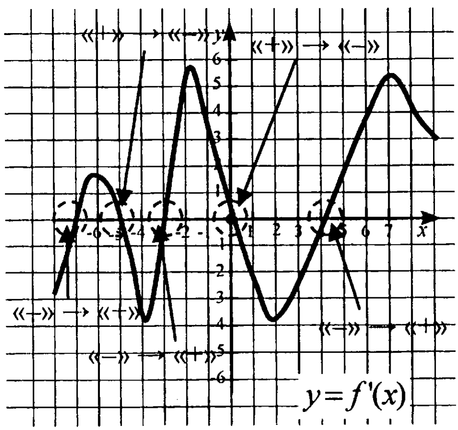


1) точки максимумов;

2) точки минимумов.

Решение:

Сначала выбираем все те точки, в которых производная равна нулю или не существует, в нашем случае $x = -7; -5; -3; 0; 4$.



1) Из них будут являться точками максимумов те, в которых производная меняется с положительного знака на отрицательный.

Ответ: $x = -5; 0$.

2) К точкам минимума будут относиться те, в которых смена знака с отрицательного на положительный.

Ответ: $x = -7; -3; 4$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Теорема № 6. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значения.

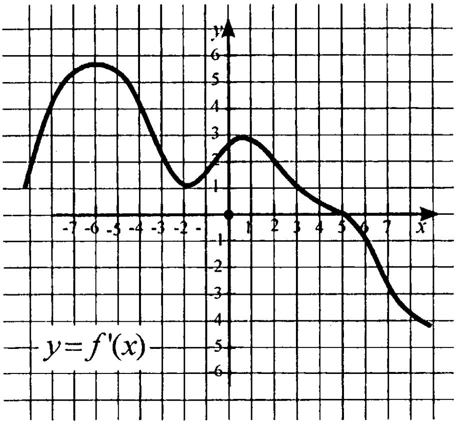
Теорема № 7. Наибольшего и наименьшего значения непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

Теорема № 8. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке и имеет внутри него единственную точку $x=x_0$, в которой производная функции либо равна нулю, либо не существует, тогда:

1) если $x=x_0$ – точка максимума, то в этой точке функция принимает наибольшее значение;

2) если $x=x_0$ – точка минимума, то в этой точке функция принимает наименьшее значение.

Пример № 15. По графику производной функции $y=f'(x)$ определите абсциссу точки, в которой функция принимает наибольшее значение на промежутке (–6; 7).

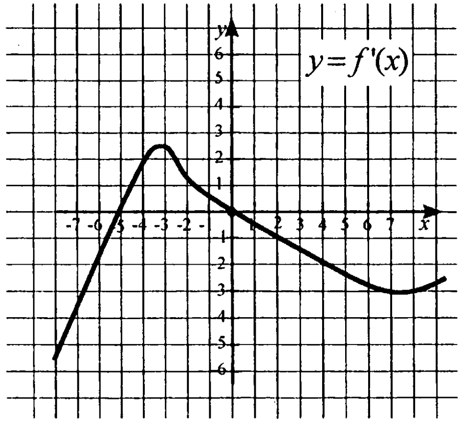


Решение:

Так как дан график производной функции, то задача сводится к теореме № 8. Видим, что производная равна нулю только в точке $x=5$ и при этом производная меняется с положительного знака на отрицательный, следовательно, данная точка является для функции точкой максимума.

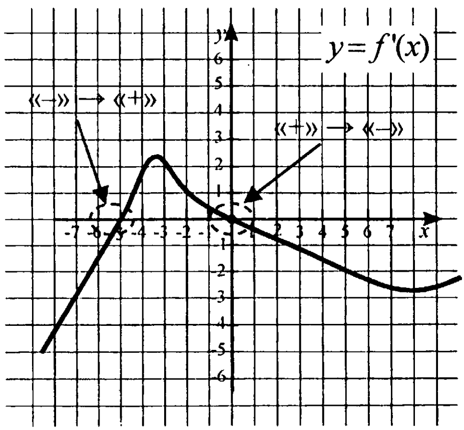
Ответ: $x=5$.

Пример № 16. По графику производной функции $y=f'(x)$ определите абсциссу точки, в которой функция принимает наименьшее значение на промежутке (–6; 2).



Решение:

Аналогично, как и в предыдущем задании, решение сводится к теореме № 8. На чертеже видим, что производная равна нулю в двух точках: $x=-5$ и $x=0$. Необходимо найти наименьшее значение, то есть из этих точек выбрать точку минимума (производная функции меняется с отрицательного значения на положительное).



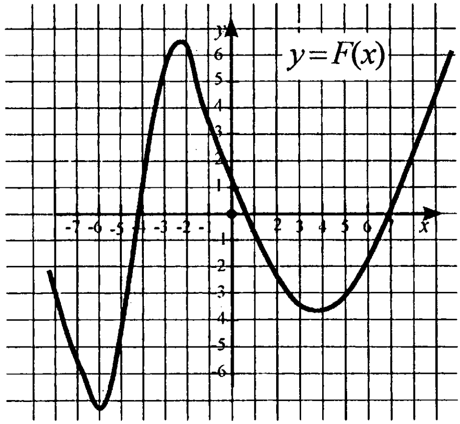
Ответ: $x=-5$.

Первообразная функции и интеграл.

Функция $y=F(x)$ называют первообразной для функции $y=f(x)$ на промежутке, если для любого аргумента из данного промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Из определения видно, что сама функция для своей первообразной является производной, тем самым многие задачи, которые рассматриваются в теме производной функции, можно переформулировать и для связи функции и ее первообразной.

Пример № 17. По графику первообразной функции $y=F(x)$ определите количество точек, в которых функция $y=f(x)$ равна нулю.

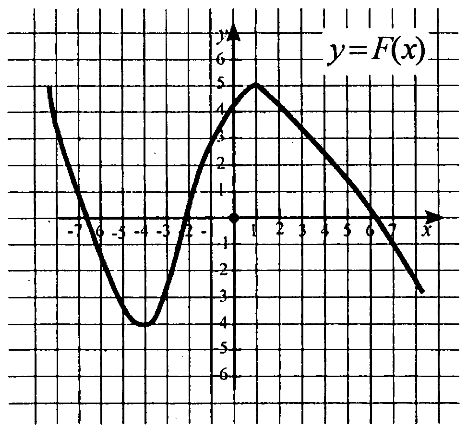


Решение:

Пользуясь связью между функцией и ее производной, заметим, что в задаче необходимо просто посчитать количество экстремумов, так как $F'(x)=f(x)$.

Ответ: 3.

Пример № 18. По графику первообразной функции $y=F(x)$ определите количество точек с целыми значениями абсцисс, в которых функция $y=f(x)$ отрицательна на промежутке (–6; 7).



Решение:

Снова обратимся к связи функции и ее производной. В нашем случае функция будет отрицательна в тех точках, в которых ее первообразная убывает, следовательно, это числовые промежутки $x\in(-6;-4)\cup(1;7)$, которые подходят к рассмотренному в задании промежутку. Теперь необходимо пересчитать все целочисленные значения в полученных промежутках, не забывая о том, что концы числовых промежутков не включаются. Поэтому в качестве решения подходят числа: –5; 2; 3; 4; 5; 6. В ответ записываем их количество.

Ответ: 6.

Теперь перейдем к геометрическому смыслу определенного интеграла. В курсе математики известна формула, по которой вычисляется определенный интеграл.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Но при решении задач, в которых известен только график функции и ничего не сказано про ее аналитическую запись, данной формулой пользоваться нецелесообразно. Достаточно помнить *геометрический смысл определенного интеграла от положительной функции:* площадь криволинейной трапеции.

Во многих заданиях на нахождение площадей криволинейных трапеций можно просто разбить криволинейную трапецию на такие фигуры, площади которых уже умеем находить из курса геометрии. Вот некоторые из них:

1) площадь треугольника общего вида: $S = \frac{1}{2}ah$;

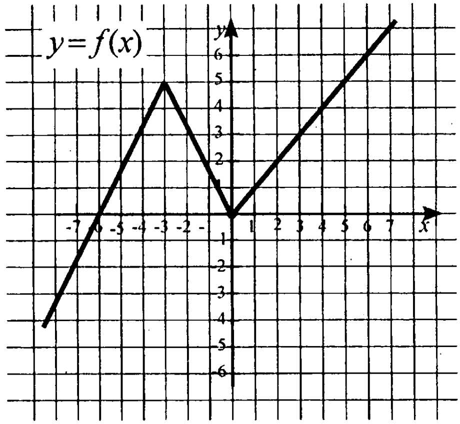
2) площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$;

3) площадь прямоугольника: $S = ab$;

4) площадь квадрата: $S = a^2$;

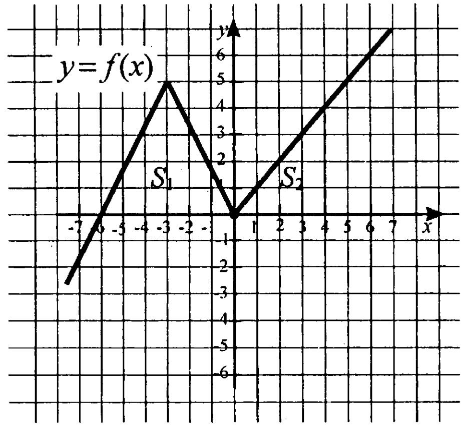
5) площадь трапеции: $S = \frac{1}{2}h(a+b)$.

Пример № 19. Вычислите $\int_{-6}^{4} f(x)\,dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.



Решение:

Заметим, что на данном числовом промежутке данный интеграл в качестве ответа дает сумму площадей двух треугольников, один из которых – прямоугольный:



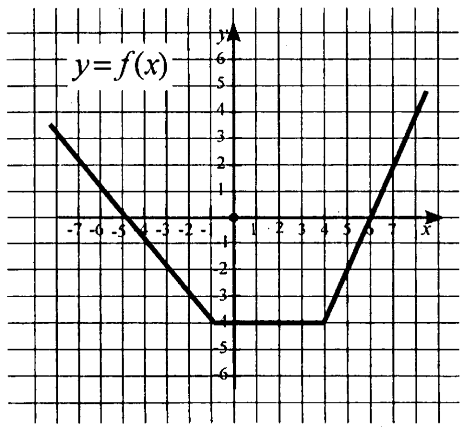
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8;$$

$$\int_{-6}^{4} f(x)\,dx = S_1 + S_2 = 15 + 8 = 23.$$

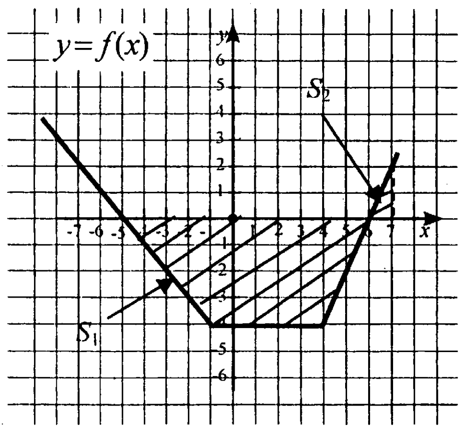
Ответ: 23.

Пример № 20. Вычислите $\int_{-5}^{7} f(x)\,dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.



Решение:

Здесь также разобьем криволинейную трапецию на две фигуры – трапецию и прямоугольный треугольник.



$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (5+11) = 32;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1;$$

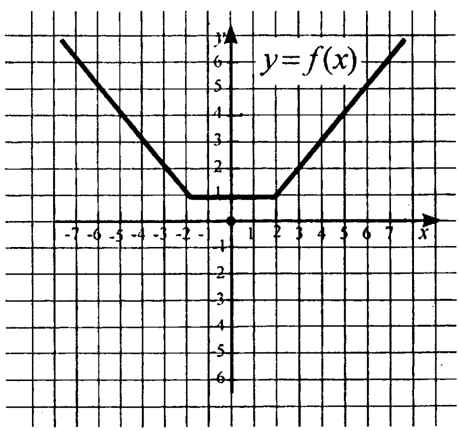
$$\int_{-5}^{7} f(x)\,dx = S_2 - S_1 = 1 - 32 = -31.$$

Ответ: –31.

Для вычисления определенного интеграла в некоторых случаях могут помочь свойства функции. Рассмотрим примеры вычисления определенных интегралов от четных и нечетных функций на симметричных интервалах.

Пример № 21. Вычислите $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.

Решение:



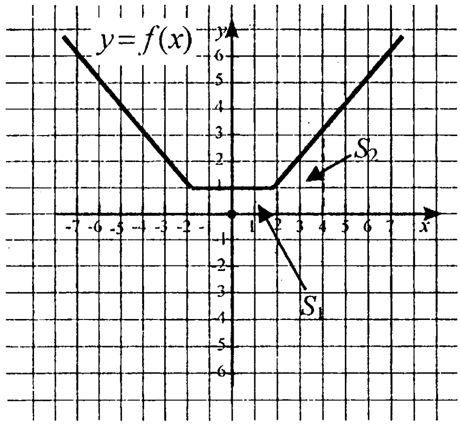
Так как дан определенный интеграл на симметричном отрезке [–4; 4] и по графику видим симметрию функции относительно оси ординат, следовательно, функция является четной, поэтому достаточно посчитать интеграл одной половины, а потом результат умножить на два.

$S_1 = 1 \cdot 2 = 2;$

$S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1+3) = 4;$

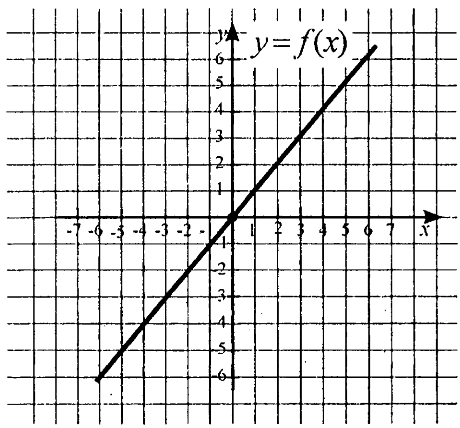
$\int\limits_{-4}^{4} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{4} f(x)\,dx =$

$= 2\left(S_1 + S_2\right) = 2 \cdot (2+4) = 12.$



Ответ: 12.

Пример № 22. Вычислите $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$, если график функции $y = f(x)$ изображен на рисунке.



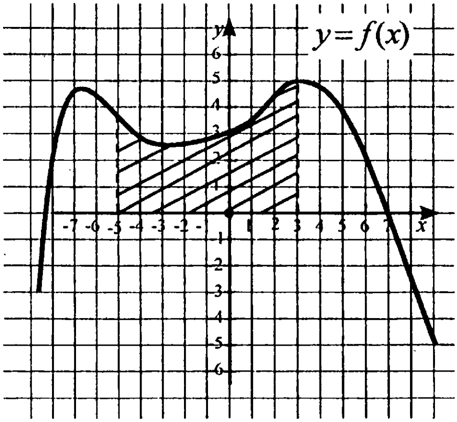
Решение:

Снова дан определенный интеграл на симметричном отрезке [–2; 2] и по графику видим симметрию функции относительно начала координат, следовательно, функция является нечетной и результат определенного интеграла левой части функции и правой части будет отличаться только знаком, то есть интеграл будет равен нулю.

Ответ: 0.

Замечание. Необходимо помнить, что площадь криволинейной трапеции считается от положительной функции, если задание будет с отрицательной функцией, то необходимо взять противоположный результат.

П р и м е р № 23. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.



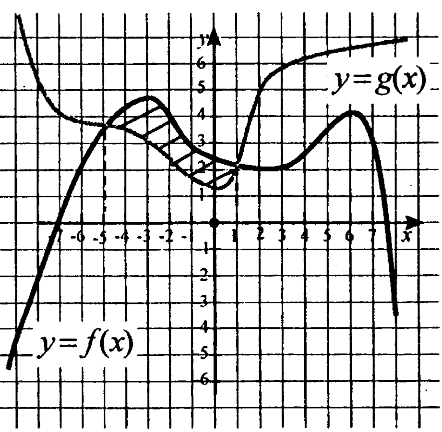
Р е ш е н и е:

В первую очередь необходимо проанализировать функцию, является ли она положительной на заданном отрезке или отрицательной. По чертежу видим, что функция положительна на отрезке [–5; 3], это означает, что определенный интеграл будет положительным.

О т в е т: $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx.$

П р и м е р № 24. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.

Р е ш е н и е:

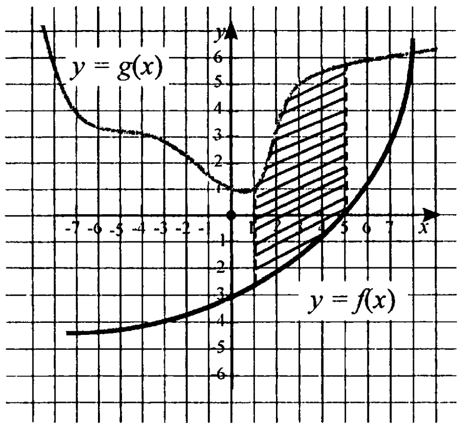


По чертежу определяем пределы интегрирования – это отрезок [–5; 1]. Заштрихованная часть может получиться при вычитании из площади криволинейной трапеции, образованной функцией $y = f(x)$, площади криволинейной трапеции, образованной функцией $y=g(x)$. Так как площадью криволинейной трапеции является определенный интеграл, а функции положительны на данном отрезке, тогда получаем результат.

Ответ: $\int_{-5}^{1} f(x)\,dx - \int_{-5}^{1} g(x)\,dx.$

Замечание. Согласно свойству определенного интеграла в вышерассмотренном примере равнозначен и такой ответ:

$$\int_{-5}^{1} (f(x)-g(x))\,dx.$$



Пример № 25. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.

Решение:

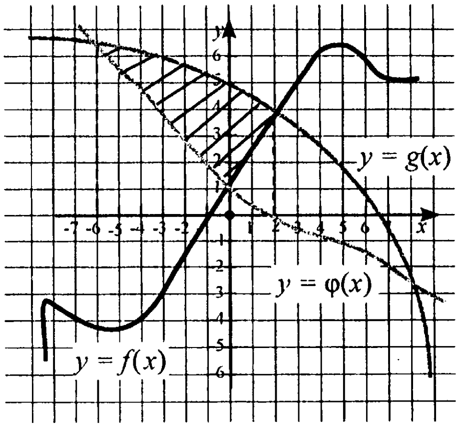
Пределами интегрирования в данном примере будет являться отрезок [1; 5]. Функция $y=g(x)$ положительна, поэтому площадь криволинейной трапеции, образованная данной функцией, будет $S=\int_{1}^{5} g(x)\,dx.$

Функция $y=f(x)$ отрицательна на данном отрезке, поэтому площадь полученной криволинейной трапеции будет $S=-\int_{1}^{5} f(x)\,dx.$

В качестве ответа будет сумма данных площадей, то есть разность двух определенных интегралов.

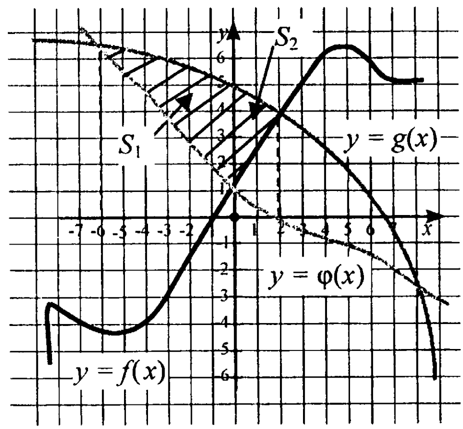
Ответ: $\int_{1}^{5} g(x)\,dx - \int_{1}^{5} f(x)\,dx.$

П р и м е р № 26. Составьте формулу площади заштрихованной фигуры.



Р е ш е н и е:

Здесь криволинейную трапецию образуют три функции, которые являются положительными. Пределами интегрирования является отрезок [–6; 2]. Заметим, что на данном отрезке существует точка $x = 0$, которая условно делит криволинейную трапецию на две фигуры. Одна из них ограничена функциями $y = g(x)$ и $y = \varphi(x)$, вторая часть функциями $y = g(x)$ и $y = f(x)$. Поэтому площадь всей криволинейной трапеции будем рассматривать в виде суммы двух площадей.



$$S_1 = \int_{-6}^{0} (g(x) - \varphi(x))\,dx;$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx;$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-6}^{0} (g(x) - \varphi(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx.$$

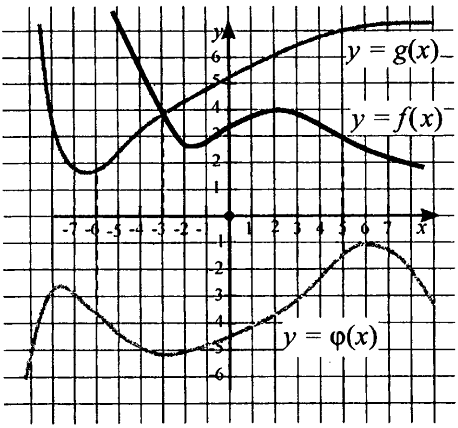
Пользуясь свойствами определенного интеграла, можно преобразовать данный результат следующим образом:

$$S=\int\limits_{-6}^{0} g(x)\,dx-\int\limits_{-6}^{0}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{0}^{2} g(x)\,dx-\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-6}^{2} g(x)\,dx-\int\limits_{-6}^{0}\varphi(x)\,dx-\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_{-6}^{2} g(x)\,dx-\int\limits_{-6}^{0}\varphi(x)\,dx-\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx.$

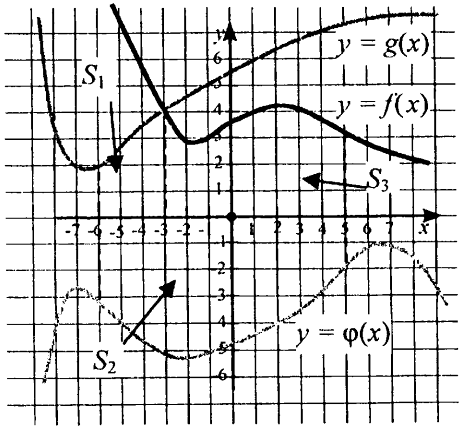
Пример № 27. Составьте формулу площади криволинейной трапеции, ограниченной функциями $y=f(x)$, $y=g(x)$ и $y=\varphi(x)$ на отрезке $[-6; 5]$.



Решение:

Данный отрезок можно поделить на два отрезка $[-6; -3]$ и $[-3; 5]$. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ положительные, следовательно, определенные интегралы от данных функций будут также положительные, а $y=\varphi(x)$ – отрицательная функция на рассматриваемом отрезке, следовательно, определенный интеграл от этой функции будет со знаком минус.

Площадь искомой фигуры можно составить из трех площадей криволинейных трапеций:



$$S_1 = \int_{-6}^{-3} g(x)\,dx;$$

$$S_2 = -\int_{-6}^{5} \varphi(x)\,dx;$$

$$S_3 = \int_{-3}^{5} f(x)\,dx.$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-6}^{-3} g(x)\,dx - \int_{-6}^{5} \varphi(x)\,dx + \int_{-3}^{5} f(x)\,dx.$$

Ответ: $\int_{-6}^{-3} g(x)\,dx - \int_{-6}^{5} \varphi(x)\,dx + \int_{-3}^{5} f(x)\,dx.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алимов, Ш. А.* Алгебра и начала анализа : учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 2007. – 384 с.

2. *Демонстрационный* вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2013 года по математике.

3. *Колмогоров, А. Н.* Алгебра и начала анализа : учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов. – М. : Просвещение, 2008. – 384 с.

4. *Лысенко, Ф. Ф.* Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Учебно-тренировочные тесты : учеб.-метод. пособие / Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д : Легион, 2013. – 144 с.

5. *Мордкович, А. Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : в 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с.

6. *Мордкович, А. Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2009. – 239 с.

7. *Никольский, С. М.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов. – М. : Просвещение, 2009. – 464 с.

8. *Семенов, А. Л.* ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В / А. Л. Семенов, И. В. Ященко. – М. : Экзамен, 2012. – 543 с.

9. *Семенов, А. Л.* ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / А. Л. Семенов, И. В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2011. – 192 с.

10. *Семенов, А. Л.* ЕГЭ-2014. Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / А. Л. Семенов, И. В. Ященко. – М. : АСТ : Астрель, 2014. – 123 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Охраняется законом об авторском праве. Воспроизведение всего пособия или любой его части, а также реализация тиража запрещаются без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

Приглашаем к сотрудничеству
учителей, методистов и других специалистов в области образования для поиска и рекомендации к публикации материалов, разработок, проектов по учебной и воспитательной работе. Издательство «Учитель» гарантирует выплату гонораров авторам за предоставленные работы и вознаграждение за работу по поиску материала. E-mail: met@uchitel-izd.ru; тел.: (8442) 42-17-71; 42-23-41; 42-23-52. Подробности на сайте: www.uchitel-izd.ru

Информацию о предложениях издательства, новости образования
см. в интернет-магазине «УчМаг»: www.uchmag.ru

Приглашаем на курсы повышения квалификации!
Издательство «Учитель» получило лицензию на осуществление образовательной деятельности по программе «Дополнительное профессиональное образование» для педагогов всех специальностей с выдачей удостоверения государственного образца (приказ Минобрнауки Волгоградской области от 4 августа 2014 г. № 1242-у). Информация о курсах, расписание, запись на обучение: www.uchmet.ru; 8-800-1000-299 (звонок по России бесплатный).

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

10–11 классы

Задания на готовых чертежах

Автор-составитель
Николай Юрьевич Милованов

Ответственные за выпуск
Л. Е. Гринин, Н. Е. Волкова-Алексеева
Редакторы-методисты **Г. П. Попова, Н. Г. Салагина**
Технический редактор **Н. М. Болдырева**
Редактор-корректор **Л. Н. Ситникова**
Компьютерная верстка **Е. Н Ивановой**
Дизайн обложки **Н. А. Цибановой**

Издательство «Учитель»
400079, г. Волгоград, ул. Кирова, 143

Подписано в печать 23.09.14. Формат 60 × 84/16.
Бумага газетная. Гарнитура Тип Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,3. Тираж 7 500 экз. (1-й з-д 1– 2 500). Заказ № 1270.

Отпечатано с оригинал-макета в ОАО «Калачевская типография».
404507, Волгоградская обл., г. Калач-на-Дону, ул. Кравченко, 7.